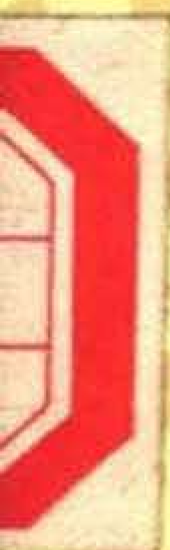
中国数学会60年

SIXTY YEARS OF CHINESE MATHEMATICS SOCIETY

杨 乐 李 忠 主编



湖南教育出版社

花甲猶少年
奮勇前進
数學成大国
广聚英才
中国数學會
六旬之庆

陳省身
乙亥正月



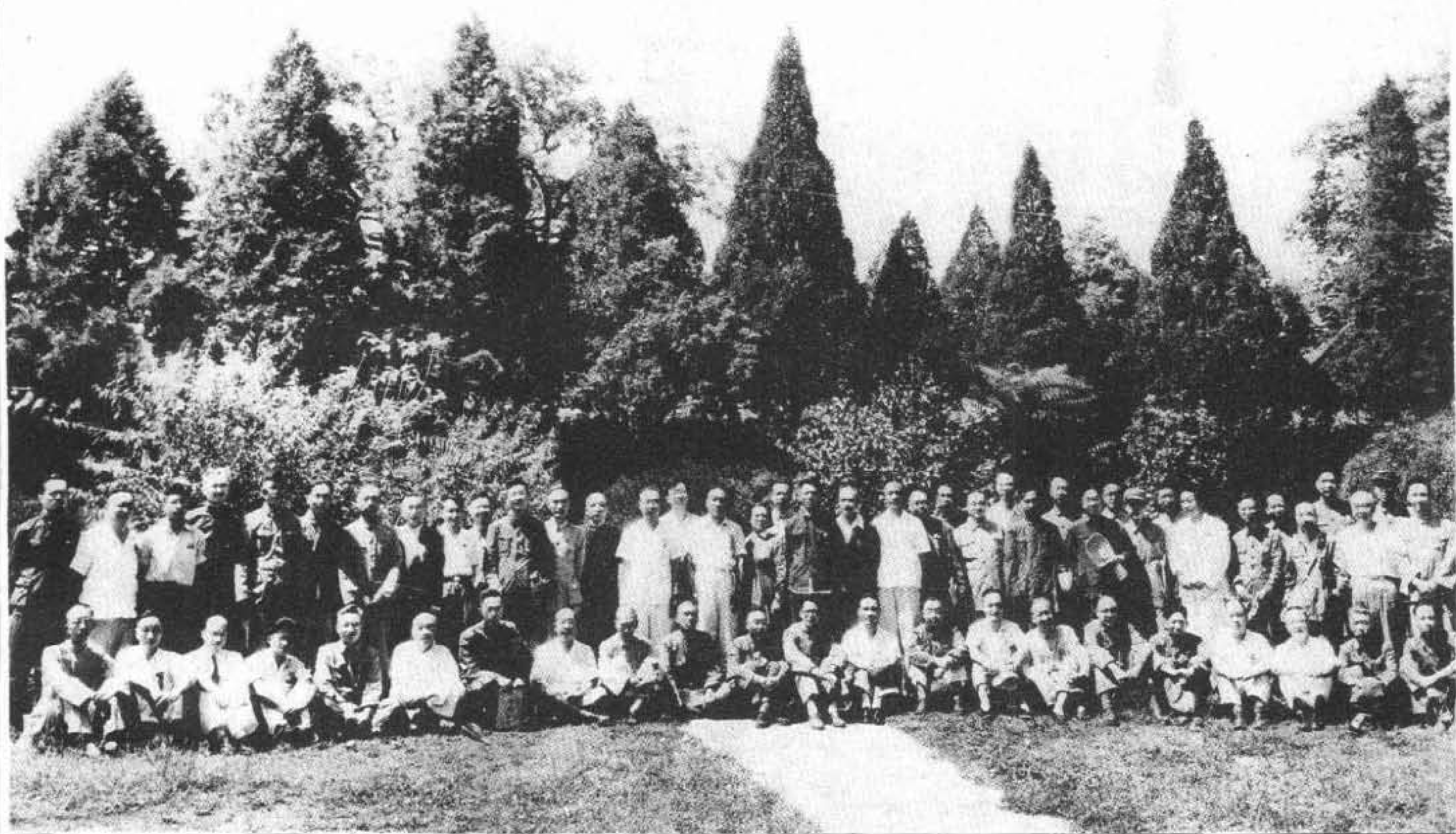


1936 年由中国数学会创办的《中国数学会学报》创刊号



1936 年由中国数学会创办的普及性刊物《数学杂志》创刊号

中國數學會第一次代表大會 一九五一年八月十六日



新中国成立后中国数学会第一次代表大会于 1951 年 8 月 15 日至 20 日在北京举行



中国数学会第三届理事会第一次会议于 1979 年 3 月 5 日至 10 日在杭州举行





▲ 中国数学会第五届理事会第一次会议于 1989 年 4 月 6 日至 8 日在北京大学举行
应邀参加开幕式的往届理事会领导和与会理事合影



胡敦复(1886—1978)中国数学会第一届董事会(1935—1948)主席



姜立夫(1890—1978)新中国数学会第一届理事会(1940—1943)理事长



熊庆来(1893—1969)新中国数学会第二届理事会(1944—1948)理事长



华罗庚(1910—1985)中国数学会第一、二、三届理事会(1951—1983)理事长



吴文俊(1919—)中国数学会第四届理事会(1984—1987)理事长



王 元(1930—)中国数学会第五届理事会(1988—1991)理事长



杨 乐(1939—)中国数学会第六届理事会(1992—1995)理事长



◀中国数学会五十周年年会，于1985年12月在上海复旦大学举行
前排(左起)1. 陈绳武 2. 吴文俊 3. 苏步青 4. 周培源 5. 周光召 6. 陈省身 7. 谢希德 8. 柯召 9. 吴大任



▲中国数学会与韩国数学会于1994年8月在北京联合举办国际纯粹数学及应用数学会议此为部分与会代表的合影

1958 年毛泽东主席接见华罗庚等科学家



1955 年周恩来总理和姜立夫 教授等在全国政协会议上



1984 年在中南海　邓小平同志接见陈省身等数学家

（左起）2. 丁石孙　3. 何东昌　4. 郑士宁（陈省身夫人）

5. 邓小平　6. 陈省身　7. 胡国定



中国数学会五十周年年会于 1985 年 12 月 6 日至 10 日在上海举行

上海市市长江泽民同志接见与会中外数学家

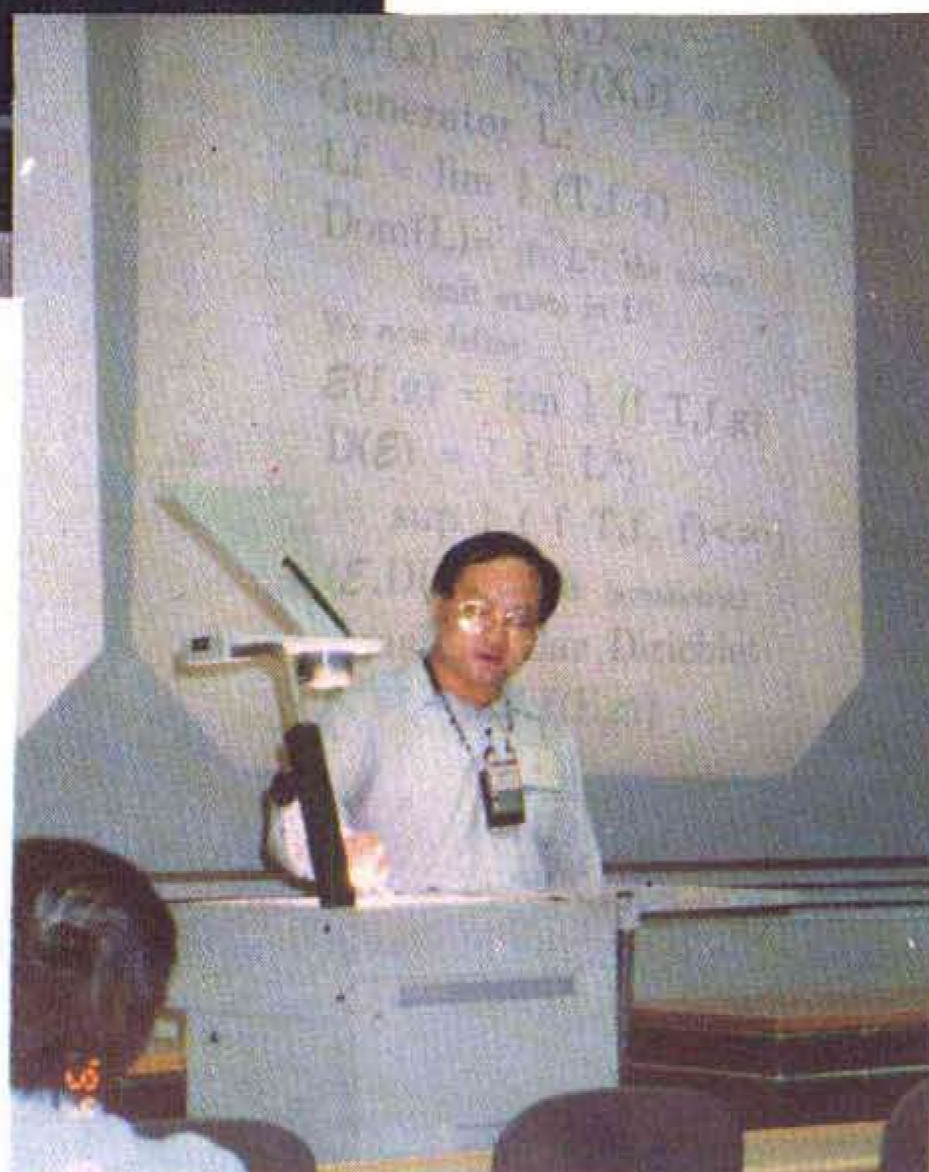
（左起）1. 江泽民　2. 周培源　3. 苏步青

参加1986年8月在美国加州举行的国际数学家大会中国部分数学家合影

(左起)1. 王柔怀 2. 吴文俊 3. 程民德 4. 谷超豪 5. 齐民友 6. 张恭庆







1994年8月国际数学家大会在瑞士苏黎世举行

▲张恭庆应邀在会上作45分钟学术报告

▶马志明应邀在会上作45分钟学术报告



1989 年 10 月 9 日第二届陈省身数学奖颁奖仪式
主席台(左起)2. 吴文俊　3. 刘永龄(捐款者)　4. 王元
5. 陈省身　6. 郑士宁　7. 江泽涵　8. 严东生



▲ 1992 年 11 月 4 日在北京科学会堂举行首届华罗庚数学奖颁奖仪式



▲1992 年 11 月 4 日首届华罗庚数学奖颁奖仪式在北京科学会堂举行
主席台(左起)1. 任立　2. 杨乐　3. 高潮　4. 宋健　5. 卢嘉锡
6. 高镇宁　7. 吴筱元(华罗庚夫人)　8. 石钟慈



▲1992 年宋健等在人民大会堂会见丘成桐教授
后排(左起)2. 杨乐　3. 宋健　4. 丘成桐　5. 王佛松
前排为丘的两个孩子



1993年中国科学院学部会议与会数学院士合影

(前排左起)1. 吴文俊　2. 陆启铿　3. 程民德　4. 廖山涛
5. 段学复　6. 柯召　7. 苏步青　8. 谷超豪　9. 胡和生　10. 王梓坤

(后排左起)1. 丁夏畦　2. 石钟慈　3. 周毓麟　4. 姜伯驹
5. 万哲先　6. 杨乐　7. 张恭庆



中国数学会六十周年年会，于1995年
5月18日至21日在北京清华大学举行

目　录

前　言

1995年是中国数学会成立60周年. 中国数学会常务理事会根据湖南教育出版社的建议决定编辑出版《中国数学会60年》一书,以回顾60年来中国数学会所走过的曲折历程以及老一辈中国数学家为发展我国数学事业所做的艰苦努力及取得的成就，反映我国数学研究与教育在新中国成立之后(特别是改革开放以来)的发展与进步. 书中为读者提供了可读性较强的反映中国数学会60年来重大活动及历史沿革的史料，其中包括一些珍贵的有历史价值的照片. 我们还邀请了部分科学院院士以及部分知名数学家撰写了纪念性文章. 这些文章从若干不同的侧面反映了我国数学研究的历史与近来的发展.

这里我们要着重强调指出，在编辑这本书的过程中始终不打算编成一本关于中国数学60年的书. 目前我们没有能力这样做. 也就是说，这本书的目的不是全面总结我国数学研究各分支学科的进展，邀请部分专家学者撰写纪念性文章，只是作为若干侧面的代表来说明有关学科的发展及我国数学家在其中的贡献. 在邀稿过程中，又有相当一部分专家由于工作繁忙等原因未能应邀撰写. 这样一来势必有一些重要学科在本书中没有文章涉及，这不能不说是一个遗憾. 希望数学界同仁能够理解：这本书是关于中国数学会的书，全面总结我国数学研究进展不是它的目标.

这本书能在短时间内出版，首先要感谢湖南教育出版社的同志们，他们为出版此书付出了辛勤劳动并克服了许多困难. 此外，我们还要感谢国家自然科学基金委数理学部及天元基金领导小

组，他们为本书的出版提供了资助．中国数学会前任理事长王元院士及前任副理事长丁石孙教授应邀担任本书编辑小组的顾问，关心并指导了本书的编辑工作．参加本书编辑小组工作的有南开数学研究所史树中教授，北京大学数学系周民强教授，中国科学院数学研究所袁向东教授，中国数学会副秘书长任南衡同志和湖南教育出版社孟实华同志，他们负责了稿件的审阅及文字的修订工作．中国数学会秘书张金玉同志为收集各时期的照片做了不少工作．在这里我们谨向上述诸位同志表示衷心感谢．

杨乐　李忠

1995 年 5 月 28 日

改革开放　再创辉煌

——庆祝中国数学会成立六十周年

杨　乐　　　李　忠
（中国科学院）　（北京大学）

中国数学会从1935年成立，已经走过了60年的历程.

众所周知，数学是中华民族擅长的学科. 我国古代数学历史悠久，成就辉煌. 从商周时期到宋元年间不断有所发展，并于13世纪达到高峰，其中一些成就在当时是世界上领先的. 从明朝以后，我国数学的发展停滞下来. 而在欧洲，经过文艺复兴与工业革命，数学有了飞速的发展. 微积分的诞生即是一重要标志.

一　中国数学会的诞生前后

19世纪末期，西方近代数学开始传入中国. 辛亥革命以后，一些学者从欧、美、日本留学归来，在我国部分大学创办数学系，培育人才，倡导数学研究. 到30年代，我国已经形成了一支从事近代数学教学与研究的队伍. 胡敦复、冯祖荀、熊庆来、陈建功、姜立夫、苏步青、江泽涵等便是其中杰出的代表. 于是，中国数学会应运而生.

1935年7月25日，中国数学会在上海交通大学图书馆举行了成立大会，也就是第一次年会，共有33人出席. 大会通过了会章，选举了学会领导，宣读了论文. 1936年，中国数学会在北京举行了第二次年会. 由学会主办的《中国数学会学报》及《数学

杂志》也先后创刊.

1937年，正当中国数学会筹备召开第三次年会之际，抗日战争全面爆发,致使这次年会推迟至1940年八九月间在抗战后方重庆、昆明、成都、遵义等处以分散的方式举行. 在抗战极其艰难的岁月里,数学家们仍然坚持研究与培养人才的工作. 华罗庚、陈省身、许宝騄等便是研究工作的佼佼者. 抗战胜利后，1947年10月在北京举行了中国数学会第四次年会. 中国数学会第一阶段的十四年历史充分说明了创业之艰难，同时看到老一辈数学家为发展中国数学事业不屈不挠的奋斗精神.

二　中国数学会的发展以及文革浩劫

1949年新中国成立以后，中国数学会立即着手恢复工作. 于1951年8月在北京召开了第一次代表大会，恢复了它主办的《中国数学会学报》与《数学杂志》(一年多以后更名为《数学学报》与《数学通报》)，还创办了《数学进展》. 在大学院系调整以后，各大学数学系的师生人数剧增. 许多十分优秀的学生积极报考数学系，立志献身数学事业. 翻译了大量的苏联数学教材与参考书籍，教学内容有很大革新. 我国数学分支的门类逐步齐全，尤其是应用数学中的一些分支如微分方程、数理统计、运筹学、控制论等与计算数学有了很大发展.虽然受到许多政治运动的冲击,经历了一些曲折(1960年2月在上海召开的中国数学会第二次代表大会上即有表现),从1949年到1966年的第二阶段是中国数学走向独立与成熟的时期. 在这十七年间，估计至少有450位数学家发表了约1800篇论文，其中《数学学报》被美国数学会逐期译成英文在美国出版，而1949年以前总共只有74位数学家发表了342篇论文. 在这一阶段的研究工作中，应特别提到华罗庚、吴文俊、陈景润等.

1966 年到 1976 年"文化大革命"期间，神州大地受到一场浩劫，数学研究与教育也未能幸免．学会活动被迫完全停止，学术杂志被迫停刊．数学被批判为"脱离实践的伪科学"，从 Euclid，Newton 到 Gauss，Hilbert 等统统在打倒之列．数学研究人员几乎都被迫改行从事其他工作，人才的培养也完全中断了．"文化大革命"造成了极其严重的破坏和十分恶劣的影响，留给我们永远必须牢记的沉痛教训．

当我国数学界从十年浩劫的恶梦中醒来时，世界数学研究的面貌发生了巨大变化，一些新的研究领域与研究方向出现了，不少热门研究课题是国内不熟悉的．我国数学与国际数学的先进水平在整体上差距比"文化大革命"前拉大了．

三　改革开放后，中国数学获得新生

1978 年，我国确立了以经济建设为中心的基本方针，实行改革开放的政策，为我国经济的高速发展拉开了序幕，也为科学技术的发展迎来了明媚的春天．各大学与研究机构的数学家得以重新开始数学研究与数学工作．虽然阔别了十年的数学公式和概念曾经在开始时使他们有所迷茫，然而以刻苦、勤奋著称的中国数学家很快便又在这些领域中驰骋起来．

更令人欣慰的是许多富有聪明才智的年轻人进入了数学的宫殿．他们得到了极好的机遇，只要自己努力，大学毕业后不仅在国内可以读研究生，取得硕士与博士学位，继续从事博士后的研究工作，而且还可以到美国、西欧等地国际上第一流的大学去深造，直接受教于国际学术大师，在最好的学术圈子里得到熏陶．

国际学术交流空前活跃，许多中、青年学者都获得了各种机会到欧美等国进行访问、合作研究与学习、进修．他们在国外开阔了眼界，扩大了领域，了解国际的动态，做出了有意义的研究

工作．回来后成为各大学与研究机构的骨干．

另一方面，许多外国著名数学家应邀来国内讲学，尤其是华裔学者对国内数学的发展更加倾注了关注与热情．陈省身、丘成桐等教授经常回国讲学，提出倡议，积极培育青年人才．

改革开放以来的十六七年，是我国近代数学发展的最佳阶段：我国数学家的队伍迅速扩大，优秀的青年人才不断涌现，研究领域与方向产生了变化，更加齐全；在一些重要领域内，我国数学家取得了优秀成果，获得国际上的重视与好评．我国数学研究的整体水平与国际先进水平的差距有所缩小．

四　我国数学界获得的重要奖励

我国数学研究的成绩在一些重要奖励上得到了体现．国家自然科学奖在我国影响很大，数学获奖项目在其中占了9.9%，在一等奖中的比例高达22.3%，然而数学研究经费在国家自然科学基金中仅占1.3%．

以下是国家自然科学奖的一等奖与二等奖中数学家的名单与项目：

华罗庚　典型域上的多复变函数论，一等奖．

吴文俊　示性类及示嵌类的研究，一等奖．

陈景润、王元、潘承洞　哥德巴赫猜想研究，一等奖．

廖山涛　微分动力系统稳定性研究，一等奖．

陆家羲　关于不相交Steiner三元素大集的研究，一等奖．

苏步青　K展开空间与一般度量空间的几何学，射影空间曲线论，二等奖．

冯　康　有限元方法，二等奖．

杨　乐、张广厚　整函数与亚纯函数的值分布理论，二等奖．

廖山涛　　微分动力系统，二等奖.

谷超豪、李大潜、俞文魮　陈恕行　　偏微分方程研究，二等奖.

钟家庆　　复几何与相关问题，二等奖.

关肇直、宋健、于景元、冯德兴等　　飞行器弹性控制理论研究，二等奖.

张恭庆　　临界点理论及其应用，二等奖.

姜伯驹　　曲面自映射不动点理论，二等奖.

丁夏畦、陈贵强、罗佩珠　　补偿列紧原理与等熵气体动力学方程组，二等奖.

丁伟岳　　非线性微分方程及其在几何中的应用，二等奖.

马志明、严家安　　狄氏型与随机分析，二等奖.

获得三等奖和四等奖的20余项，这里不一一列出.

由中国数学会负责评审的有两项重要数学奖励：陈省身奖与华罗庚奖."陈省身数学奖"是香港亿利达集团总裁刘永龄先生慷概捐资，由他与杨振宁博士提议设立的，主要用以奖励优秀的中青年数学家，每年一名，一般不超过五十岁. 从1986年设立以来，获奖者先后为钟家庆、张恭庆、姜伯驹、李邦河、肖刚、冯克勤、丁伟岳、忻元龙、洪家兴、马志明. 他们的研究领域分属于复几何、非线性偏微分方程、低维拓扑、微分几何、代数几何、代数数论、几何分析与随机分析等. "华罗庚数学奖"是1992年在湖南教育出版社赞助下，由中国数学会设立的，奖励在数学上有系统的学术研究的专家，没有年龄限制，同样每两年评选两名. 已获得"华罗庚数学奖"的是陈景润、陆启铿、谷超豪、万哲先，分别表彰他们对数论、多元复分析、偏微分方程及数学物理与代数学的研究.

此外，我国数学家获得的重大奖励有：

第三世界科学院数学奖：廖山涛、吴文俊、张恭庆；

陈嘉庚物质科学奖：华罗庚与王元、吴文俊；

求是基金奖：吴文俊；

何梁何利基金奖中的数学奖：陈景润、王元、谷超豪、廖山涛、潘承洞、张恭庆；

国家图书奖：杨乐、廖山涛；

中国青年科学家奖中的数学奖：堵丁柱、王诗宬.

我国改革开放后赴海外深造的学者也有突出的表现，例如田刚获得美国 Waterman 奖，夏志宏获得美国第一届 Blumenthal 奖等.

五 我国数学界出版的专著等情况

中国数学近年来的发展还表现在学术专著的出版上. 1978 年以来，科学出版社在中国数学会的帮助下，出版了“纯粹数学与应用数学专著丛书”，迄今已出版了专著 30 卷. 这是我国高水平的数学书籍，其中已有 12 卷译成英文，由 Springer-Verlag 与科学出版社联合出版，在国际上发行. 此外有 5 卷的英译本已由其他出版社出版，3 卷即将出版. 据不完全统计，1980 年以前中国数学家总共只有 6 本专著在国外出版，而 1980 年以后已激增到一百余本专著. 其中也包括由中国数学家主编的论文集，例如介绍中国在数学的一些分支学科里的研究工作与成就的，就已出版了《单复变函数》、《数论在中国》、《计算数学在中国》、《概率论在中国》、《统计在中国》、《多复变在中国》，其他还有几本正在编辑中.

80 年代，中国数学会还协助编纂了大型工具书《中国大百科全书》中的《数学》卷. 该卷是近一千页、逾二百万字，包括了数学各分支与古今中外主要数学家的重要工具书籍. 随后，中国数学会又组织人才翻译《苏联数学大百科全书》，第一卷已经出版，第二卷也已付排. 这套书籍是国际上极高水平的工具书，书中条目系由原苏联科学院院士、通讯院士以及权威学者执笔撰写的.

除了专著外，中国数学家近年来在国外较著名的杂志上发表的文章每年已在350篇左右. 这个数字是以往无法比拟的.

经过中国数学家的努力，1986年中国数学会成功地与台湾数学家们作为统一的整体加入了国际数学联盟（IMU）. 迄至1986年,国际数学家大会仅先后邀请了华罗庚、陈景润、冯康、吴文俊作45分钟的邀请报告. 在近两次的日本京都与瑞士苏黎世的大会上,有我国赴美深造的田刚、林芳华、李俊、厉建书以及国内的数学家张恭庆、马志明应邀作了45分钟的报告. 在其他国际学术会议上的主要报告人与邀请报告人里,中国数学家已屡见不鲜了.

六　中国数学会的各项工作

1978年以来，在中国科协的领导和国内数学界同仁的大力支持与共同奋斗下，中国数学会在国内外学术交流，出版数学刊物，数学教育咨询，发展数学普及活动，以及完善学会组织建设等方面，做了许多工作，取得了显著的成绩.

1. 促进国内外学术交流

中国数学会1978年在成都，1983年在武汉举行了两次全国代表大会，1985年又在上海隆重举行了庆祝中国数学会成立50周年的大会. 在这些大会上，都组织了一些内容丰富、具有较高水平的大会报告与邀请报告. 在上海的大会上还邀请了美、英、法、德、日、意、加、波、菲与香港等国家和地区的数学会负责人与会，并作学术报告. 中国数学会的理事会除在这几次大会期间举行会议外，还于1979年在杭州、1981年在沈阳、1989年与1991年在北京举行了会议.

自1978年以来，中国数学会每年组织与支持15个左右全国性的专业会议. 各个二级学科几乎都是定期举行学术会议. 这些会议总数已超过200个，参加会议的逾二万人次，交流的学术论

文总数约一万八千余篇．这些学术会议成为国内数学交流的重要场所，对推动研究工作的开展起了积极的作用．

中国数学会认真开展国际学术交流活动．1986 年国际数学联盟接纳中国数学会为正式成员后，中国数学会均正式组团参加以后两届国际数学家大会的成员国代表会议．在 1994 年的代表会议上，中国代表团表达了申办 2002 年国际数学家大会的意愿．中国数学会努力发展与其他国家，尤其是周边国家与地区数学会的学术交流与联系．在中国数学会的积极参与和支持下，1990 年在香港成功地举办了首届亚洲数学大会，并出版了会议论文集；最近又在泰国成功地举办了第二届亚洲数学大会．1994 年，应韩国数学会的积极倡议，在北京举办了以中、韩数学家为主体的国际纯粹与应用数学会议，出版了论文集．

2．编辑、出版工作

“文革”前，中国数学会编辑与出版三种数学期刊，即《数学学报》、《数学进展》及《数学通报》．改革开放后，中国数学会增加了《应用数学学报》、《数学的实践与认识》、《运筹学杂志》（现转为中国运筹学会主办）及《应用概率统计》四种期刊．80 年代中期以来，《数学学报》及《应用数学学报》又增设了英文版．这些期刊在国内是水平较高的，有较好的影响．

除了中国数学会指导下主办的刊物外，改革开放后，各地还相继创办了许多数学杂志．现在学术性数学杂志总数已超过了五十种，普及性的数学杂志也有五十多种．其中复旦大学主办的《数学年刊》中，外文版影响较大．对于所有的数学杂志来说，都面临着进一步提高质量的问题：如何吸引国际上高质量的学术论文，如何在国际上增加发行的数量，从而使一些杂志逐步成为国际上重要的核心期刊．

3．数学教育咨询

1989 年在中国数学会召开的数学教学与科研座谈会上，当时的中国科协主席钱学森教授应邀作了讲话．他强调了学生要会用

计算机，提出理工科大学的数学课是不是要改造一番. 中国数学会教育工作委员会对此进行了讨论，并委托北京大学和复旦大学数学系分别召开理工科大学数学教育改革的座谈会，讨论数学教育如何适应未来的发展和国家的需要，如何进行改革，以及当前可以着手试验的工作. 在这两个座谈会上，大家进行了认真的讨论，认为："目前我国理工科大学的数学教育存在着与当代科学技术的发展不相适应的矛盾，其中工科类院校尤为突出"，"计算机的影响，理应不断反映到数学教育中来". 这些活动对数学教育改革起了推动作用.

中国数学会教育工作委员会还与广东教育学院联合举办了数学教育讲习班. 讲习班邀请了国内外数学教育专家作了讲演，召开了中小学数学教育改革座谈会，形成了"关于中小学数学教育改革的若干建议"，得到数学界与有关部门的重视. 教育工作委员会还协助国家教委基础教育课程教材研究中心在审订数学教学大纲方面作了不少工作.

4. 数学奥林匹克工作

改革开放以来，中国数学会普及工作委员会与各省市自治区数学会组织开展了数学奥林匹克竞赛活动，活动范围日趋广泛、深入，成为在全国范围蓬勃开展的一项重要的青少年活动. 与此同时，各地也逐步形成了一支为数学奥林匹克竞赛进行辅导、服务的队伍，他们在普及工作委员会的领导下自成体系，独立地开展工作. 通过他们的大量工作，增进了青少年对数学的爱好，发现了一些有培养前途的幼苗，对提高中学数学师资水平与教学质量发挥了积极的作用. 我国自 1986 年正式参加国际数学奥林匹克竞赛以来，每年都取得优秀成绩. 已累计获得金牌 35 块、银牌 15 块、铜牌 4 块，并取得四年总分第一、三年总分第二的成绩. 1990 年我国还成功地在北京举办了第 31 届国际数学奥林匹克竞赛.

在取得成绩的同时，我们要注意全国整体的数学教育质量的提高. 要启迪同学的创造性，提高他们的素质，而不要过分增加

学生的负担，片面追求解题技巧.

5. 数学传播工作

随着现代数学的发展越来越抽象、专门与艰深，中国数学会认为应多作数学普及工作，使得全社会对数学研究有较多的了解，使全民的数学知识有所增加，提高数学方面的素质. 为此，成立了数学传播工作委员会. 他们组织和支持了一些数学传播丛书，其中由湖南教育出版社出版的“走向数学丛书”，发挥了较好的影响. 他们还有支持数学传播和数学信息工作的研究，组织拍摄数学科普的录像片，进行数学传播优秀图书评选等活动.

改革开放以来，中国数学会一直十分重视组织建设，民主办会，实现了学会理事任期制以及连任至多两届的制度，逐步实现了理事的年轻化. 按照会章规定期限，每四年改选理事会. 此外，学会健全了组织机构，目前在各地数学会登记的共有三万多会员，其中包括一些资深的中学数学教师.《中国数学会通讯》则在学会内部和数学界起到了交流学术信息与学会活动情况的作用.

我们看到，改革开放十多年来中国数学有了蓬勃的发展，取得了许多值得称道的成果. 然而，与国际先进水平相比，我们还有不小的差距. 同时向社会主义市场经济转轨以后，各大学数学系学生与研究生的生源已大不如前，研究经费与期刊图书也较短缺. 因而我国的数学研究既有希望，又面临着很多困难，需要数学界全体同仁坚持不懈地作出努力.

发展我国数学研究与数学教育的关键在于培养出成批的优秀青年人才. 通过大学阶段、研究生和博士后的系统培养与训练，我们期望青年数学家有扎实的功底，广阔的视野，创新的精神，攻坚的能力与严谨的学风.

新的世纪已经离我们不远了. 我们衷心希望全国数学界同仁进一步团结起来，继承老一辈数学家的优良传统，坚持严谨治学与长期奋斗，将中国数学推进到新的水平，使我国成为世界上的数学大国!

中国数学会大事记

任南衡（中国科学院数学所）
张友余（陕西师范大学数学系）

1934 年

胡敦复、熊庆来、苏步青、何鲁、朱公谨、顾澄等数学家发起并筹备成立全国性的数学会，筹备会草案建议定名“中国算学会”，学会总部设在上海，并决定借暑假之机召开成立大会.

1935 年

7 月 25—27 日　中国数学会成立大会在上海交通大学举行，到会代表 33 人，胡敦复任大会主席，大会决定学会正式定名为“中国数学会”. 大会讨论通过了中国数学会章程，决定：(1) 会址设在中国科学社明复图书馆美权算学图书室（上海亚尔培路 533 号）；(2) 创办学术性和普及性两种期刊；(3) 组织数学名词审查委员会，从速审定教育部代表交议的数学名词. 会上还宣读了学术论文，选举产生了首届董事会、理事会与评议会. 召开了董事、理事、评议联席会议，推选胡敦复为董事会主席，并商讨了学会工作，决定本会“会刊”非创作不登，准备与国外著名杂

志相交换，“杂志”为国内数学工作者研究之参考，以促进我国数学之进步；推定两刊编委会名单；延聘外国学者来华讲学；酌设研究奖金；呈请教育部批准我国加入国际数学联盟的国际数学教育委员会.

8月15日　美国数学家维纳（N. Wiener）受聘来中国任清华大学数学系和电机系两系的教授一年，他的主要教学活动，是给清华以上两个系的教师和高年级学生开设傅立叶级数和傅立叶积分（包括 Lasbgye 积分），以及数学专题讲座.

9月5—9日　在会所召开数学名词审查委员会. 胡敦复主持会议，将以前由胡明复、姜立夫等拟定之数学名词初稿作最后一次审查，审查结果，确定数学名词 3426 条. 唯有 Mathematics 应译为“数学”或译为“算学”未定，仍持两种意见.

1936 年

3月22日—6月25日　巴黎科学院院士、法兰西学院教授阿达马（J. Hadamard），应清华大学数学系及中法教育基金会之聘，来华讲学三个月. 3月22日抵达上海时，中国数学会的两位常务理事朱公谨、范会国等参与接待，理事熊庆来主管在清华的讲学工作. 阿达马主讲的专题为：“Surle probléme de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires”.

5月18日　日本东北帝国大学数学教授藤原松三郎博士，因参加在挪威举行的第十届国际数学家大会，途经上海. 藤原是陈建功的博士导师，陈特邀请藤原到浙江大学作学术讲演，讲题为：Diophantine Approximation.

5月19日　维纳代表清华大学出席第十届国际数学家大会，并应邀作大会学术报告.

7月13—18日　第十届国际数学家大会在挪威奥斯陆举行.

大会组委会在会前函请各国著名大学派数学家参加，中山大学派刘俊贤参加了这次大会. 中国数学会公推当时在德国进修的姜立夫为代表，姜因事返国，未能出席，但会员中有论文寄往托人宣读.

8月1日　中国数学会主办的普及性刊物《数学杂志》创刊. 总编辑：顾澄、编委会成员有：何鲁、钱宝琮、傅种孙、段子燮、魏嗣銮、汤彦颐、蒋绍基、陈怀书、刘正经、张镇谦、武崇林、褚一飞. 创刊号由顾澄作"弁言"，共刊出9篇文章，作者是：顾澄（2篇）、朱公谨（2篇）、范会国、华罗庚、章用、孙增光、钱宝琮.

8月　中国数学会主办的学术性刊物《中国数学会学报》(Journal of the Chinese Mathematical Society) 创刊. 专载具有创造性的研究论文，用外文发表. 总编辑：苏步青，编委会成员有：熊庆来、朱公谨、孙光远、江泽涵、曾昭安、刘俊贤，华罗庚为助理编辑. 两期为一卷，创刊号是第1、2期合刊，为第1卷. 共发表9篇论文，作者是：胡坤升、N. Wiener、方德植、陈建功、曾炯之、江泽涵、申又枨、苏步青、华罗庚.

8月16—21日　中国数学会前期第二次年会，和中国科学社、物理学会、化学会、动物学会、植物学会、地理学会七学术团体在北京联合举行. 熊庆来、江泽涵、赵进义任联合年会总委员会委员及数学会年会委员会委员，郑之蕃、杨武之任数学会论文委员会委员. 会议除宣读论文，还议决了募集基金，设置奖学金，讨论"数学"与"算学"一词的定名问题；改选任期已满的理事、评议等.

8月17日　苏步青在联合年会上作了题为"射影微分几何之近代发展"的学术报告.

在中国数学会前期第二次年会上宣读论文的有：江泽涵、申又枨、程毓淮、赵淞、傅种孙、徐贤修、庄圻泰（2篇）、许宝騄、曾远荣、华罗庚、汤璪真（2篇）、陈鸿远.

8月20日　中国数学会第二届第一次董事、理事、评议联席会议，议决：(1) 1937年的年会在杭州与中国科学社联合举行；(2) 通知各会员凡有论文请尽量投向本会的学报及杂志，在外国发表者请将中文摘要投向杂志.

11月1日　《数学杂志》第1卷第2期出刊，共发表9篇文章，作者是：朱言钧（即朱公谨，3篇）、顾澄（2篇）、范会国、陈作钧、章用、华罗庚.

1937年

1月　中国数学会研究中学数学教学问题.

中国数学会于寒假期内，在北京大学举行例会（出席会员18人），着重讨论中等学校数学课程教学问题. 与会者认为中等学校的数学教学，不重实际、敷衍会考，更多偏废，有失数学之效能，亟宜设法纠正. 会议决定成立一专门委员会负责讨论研究如下问题：教材选择，教学方法，各国数学教学情况等. 此委员会交理事会推选9人组成.

2月1日　《数学杂志》第1卷第3期出刊. 共发表文章11篇，作者是：朱言钧（3篇）、范会国、章用、武崇林、徐贤修、钱宝琮、孙增光、严裕莲、顾澄.

2月　《中国数学会学报》第2卷第1期出刊. 共刊登8篇论文，作者是：L. Godeaux、J. Hadamard、庄圻泰、许宝騄、陈建功各1篇，苏步青3篇.

5月1日　中国数学会在北京师大数理学院召开理事会，决定组织“中等学校数学教学问题讨论委员会”，聘请：胡浚济、刘亦珩、傅种孙、程廷熙、郑之蕃、齐汝璜、张异军等9人为该委员会委员. 这次理事会还聘请：王仁辅、曾远荣、杨永芳、程毓淮等5人组织“数学名词整理委员会”，负责整理数学名词.

5月1日　《数学杂志》第1卷第4期出版. 共发表9篇文章，作者是：顾澄、朱言钧、樊墍（各2篇），陈作钧、吕作人各1篇，刘炳震和钟开莱合1篇.

7月初　北京市中学、师范学校数学教员暑期讲习班第三期，在中国数学会中等学校数学教学问题讨论委员会的筹备组织下开班. 第三期安排担任“教材教法及设备”讲课的教授有：刘亦珩、何鲁、程克敬、傅种孙、陈在新. 担任“数学各科的进展及其概要”讲课的教授有：朱非雪、王仁辅、朱广才、张异军、赵进义. 该期讲习班因“七七事变”而中断.

9月　波兰华沙大学拓扑学家胡雷维奇（W. Hurewicz），应北京大学邀请，订于1937年9月到北京大学作长期讲学. 因卢沟桥“七七事变”爆发，未能成行.

1938年

本年　周美权（即周达）再次向“明复图书馆美权算学图书室”捐款捐书. 该室是1931年元旦“明复图书馆”落成开馆时，专为周达捐赠的大批名贵中外数学书刊（主要是外文原版）而设置，故得其名. 1938年时逢周达60寿辰，特再捐国币七千元. 以一千元向欧美购买新书，六千元作为“美权算学图书室”基金，以利息作为该室的改良扩充之用. 周达说：“凡美权图书室中，一卷一册，必须为我个人所购置，方始名实相符也.”

1939年

8月　教育部决定 Mathematics 一律译为“数学”.

Mathematics 最早译为“算学”或“象数学”，1923年《科学

名词审查会算学名词审查组第一次审查本》决定一律译为“算学”. 然而长期以来，“数学”与“算学”一直混用，几次统一名词工作中，都因该词意见不一，未予决定，最后上交教育部. 教育部鉴于“数理化”已成为通用之简称；六艺之教，“数”居其一；且教育规程中，久已习用“数学”一名词；又各校院之沿用“数学”，“数理”或“数学天文”为系名者，共 29 个单位，而沿用“算学”或“天文算学”为系名者，仅 7 个单位. 因此，教育部决定：选用“数学”为 Mathematics 之译名，于 1939 年 8 月通令全国各校院一律遵用.

11 月 1 日　因《数学杂志》原总编辑顾澄投靠汪精卫伪政权. 中国数学会重新组织编委会，其成员有：胡敦复、何鲁、朱公谨、周美权、王仁辅、魏嗣銮、郑之蕃、姜立夫、范会国 9 人，新编委会于 1939 年 11 月 1 日在上海出版第 2 卷第 1 期，共发表文章 11 篇，作者是：周达、魏嗣銮、冷观、周炜良、郑健汉、徐桂芳、方淑姝、钱宝琮、钱大业、彭慧云、华罗庚.

1940 年

2 月　《中国数学会学报》第 2 卷第 2 期出刊. 共刊登 17 篇论文，作者是：苏步青（3 篇）、华罗庚 3 篇、柯召（2 篇）、方德植、吴大任、李华宗、周绍濂、熊全治、陈省身、周鸿经、周炜良、江泽涵（各 1 篇）. 该刊至此停刊.

3 月 18 日　孙光远受聘任“教育部大学用书编辑委员会”委员，是该委员会受聘的 37 人中唯一的一位数学家. 其任务是拟订、审核、及计划有关编辑大学用书之事宜.

4 月 6 日　姜立夫受聘任国立中央研究院评议会的第二届评议员. 他也是该评议会的第一届评议员（1935 年 4 月受聘），是这两届中央研究院评议会中唯一的数学家.

9月1日　中国数学会前期第三次年会上海会议召开．抗战以后，由于交通阻塞、经济困难，原定1937年在杭州举行的第三次年会，一直未能举行．数年来会员的研究所得，亟待交流，职员宜照章改选．中国数学会总会决定，于1940年8、9月间，分重庆、昆明、成都、遵义、城固、嘉定（即四川乐山）、上海七处分别举行年会．上海会议于9月1日在明复图书馆美权算学图书室举行，到会会员有周美权、胡敦复等20余人，交流了周炜良、雷垣、武崇林、沈璇、石法仁等的五篇论文．

9月15日　成立"新中国数学会"．抗战开始后，中国数学会的负责人大部分留在上海；后方数学界同志于1940年9月，在昆明召开的六学术团体（中国科学社、中国天文学会、中国物理学会、中国植物学会、中国数学会、新中国农学会）联合年会期间，15日举行的数学会会务会议，改组并宣告成立新中国数学会．会议推定：姜立夫、熊庆来、陈建功、苏步青、孙光远、江泽涵、杨武之、华罗庚、陈省身为理事．复经理事互推姜立夫任会长，陈省身任文书，华罗庚任会计．成立会后即召开新中国数学会第一届年会，宣读论文41篇．

1941年

2月　中国数学会选举产生第三届理事、评议．由于抗日战争，中国数学会无法在一地召开会议改选职员，便由总会分寄选票与各地会员，然后归总选举结果．新当选的和任期未满的理事、评议组成中国数学会前期第三届理事会、评议会，同未改选的董事会一起统称为第三届职员．

3月　中央研究院数学研究所筹备处成立．在研究所未正式成立之前，先聘请兼任研究员，开始研究工作．他们是苏步青、陈建功、江泽涵、陈省身、华罗庚，翌年7月起，姜立夫亦兼任研

究员.

本年　新中国数学会第二届年会在昆明举行，宣读论文 63 篇.

1942 年

4 月 17 日　华罗庚、许宝騄等荣获第一届（1941 年度）国家学术奖励金. 国家学术奖励金是由全国最高学术审议机关——教育部学术审议委员会设立的. 奖励范围共分八类，即文学、哲学、古代经藉研究、社会科学、自然科学、应用科学、工艺制造、美术. 数学属于自然科学类. 第一届（1941 年度）八类共一等奖 2 名，二等奖 10 名，三等奖 17 名. 华罗庚著的《堆垒素数论》获一等奖，许宝騄的"数理统计论文"获二等奖.

6 月 3 日晚　设在昆明西南联大的"新中国数学会"举行茶会，庆祝西南联大理学院数学系教授华罗庚、许宝騄荣获教育部学术审议委员会颁发的国家学术奖励金.

9 月　新中国数学会第三届年会在贵州湄潭举行，宣读论文 72 篇.

1943 年

本年　苏步青、周鸿经、钟开莱荣获第二届（1942 年度）国家学术奖励金. 其中苏步青的"曲线射影概论"获一等奖；周鸿经的"傅氏级数论文"及钟开莱在概率论与数论方面的工作获二等奖.

本年　新中国数学会第四届年会在四川重庆北碚举行，宣读论文 48 篇. 据统计此时已有会员百余人，在第四届年会上成立了

“新中国数学会重庆分会”.

本年秋冬之交　在成都的各大专院校的数学工作者正式成立“新中国数学会成都分会”. 参加的教授有：曾远荣、吴大任、柯召、魏嗣銮、李晓舫、张孝礼、余光烺、张鸿基、余介石等. 成都分会成立后决定每半年召开一次学术交流会.

1944 年

4 月　新中国数学会成都分会召开学术交流会，由燕京大学曾远荣主讲：“H 空间问题”.

7 月 7 日　教育部公布《著作发明及美术奖励规则》14 条.《规则》规定：奖励每年审议一次. 凡本国学者，最近 3 年内完成的作品，经专家初审，学术审议委员会复审合格者，给以 5000 元以上之奖励金，得一等奖者另颁给奖状.

秋季　新中国数学会成都分会召开学术交流会，由金陵大学张济华主讲：“群论中的问题”.

10 月 14—15 日　新中国数学会举行第五届年会，时逢中国科学社成立 30 周年纪念，在昆明和八学术团体联合年会同时举行. 数学会年会由熊庆来主持，有五人宣读了代数与几何方面的论文（含书面发言）：华罗庚（4 篇），孙本旺（3 篇），严志达（2 篇），程毓淮、江泽涵（各 1 篇）. 五人宣读分析与应用数学方面的论文：许宝騄（3 篇），钟开莱、徐利治、华罗庚（各 2 篇），庄圻泰（1 篇）.

本年　陈建功、李华宗、王福春、卢庆骏、熊全治、胡世华荣获第三届（1943 年度）国家学术奖励金. 其中陈建功的“富里级数之蔡查罗绝对可和性论”获一等奖；李华宗的“方阵论”获二等奖；王福春的“富里级数之平均收敛”；卢庆骏的“富里级数之求和论”，熊全治的“曲线及曲面之射影微分几何”同获三等奖；

胡世华的“方阵概念之分析”获哲学类的三等奖.

1945 年

春季　新中国数学会成都分会召开学术交流会，由四川大学吴大任主讲：“积分几何问题”.

秋季　新中国数学会成都分会召开学术交流会，由齐鲁大学张鸿基主讲：“偏微分方程问题”.

本年　张素诚、吴祖基、蔡金涛荣获第四届（1944 年度）国家学术奖励金. 其中张素诚的“曲线与曲面射影微分理论之新基础”，吴祖基的“曲面之附属二次曲面系统”、蔡金涛的“展开一般行列式”分别获三等奖.

本年　新中国数学会第六届年会在重庆举行.

12 月　中国数学会参与审编的《数学名词》，由正中书局在四川重庆正式出版（初版）.

1946 年

3—5 月　华罗庚应苏联科学院与苏联对外文化协会邀请访问苏联. 其间，对他即将在苏联出版的专著《堆垒素数论》进行了校对. 该书于 1947 年由苏联科学院正式出版，后被译成中、德、匈、英、日等多种文本.

9 月　华罗庚和曾昭抡、吴大猷受军政部资助率青年学者赴美研修. 华罗庚先到普林斯顿高等研究院及大学从事研究与教学，1948—1950 年在依利诺伊大学任教授.

11 月 9 日—12 月 10 日　中国代表团在联合国教科文组织第一届大会上，建议在中国设立应用数学研究所. 结果未能实现.

本年　新中国数学会第七届年会在成都举行．此时，该会有会员约 200 人，会长为熊庆来．

1947 年

2 月—6 月　抗战胜利后，以回迁广州的中山大学为主，在广州成立南中国数学会．该会主办的杂志《数学教育》于 3 月创刊．

7 月　中央研究院数学研究所在上海正式成立．是我国现代第一个综合性的数学研究机构．姜立夫任所长，姜在美进修未回国前由陈省身代理所长．专任研究员除姜、陈外还有：陈建功、华罗庚、李华宗；兼任研究员有：苏步青、江泽涵、许宝騄、樊畿、段学复、周炜良．研究内容主要限于纯粹数学．所址于 1948 年 1 月由上海迁往南京九华山．1949 年初，中央研究院数学研究所迁往台北．

夏季　抗战胜利后，回迁南京的中央大学、金陵大学等校的数学工作者和一批中学数学教师集合成立南京数学会，推选孙光远任理事长，理事有周鸿经、管公度、张济华、李新民、马遵廷．到 1948 年因时局动荡，活动便停止了．

10 月 10—11 日　数学会与另外五个学术团体（中国物理学会、化学会、动物学会、植物学会、地质学会）在北平召开联合年会．

11 月 30 日　江泽涵、姜立夫、许宝騄、陈省身、陈建功、华罗庚、熊庆来、苏步青被提名为中央研究院第一次院士候选人．

1948 年

3 月 27 日　姜立夫、许宝騄、陈省身、华罗庚、苏步青当选

为中央研究院第一届院士.

4月20—21日　王福春荣获第六届(1946—1947年度)国家学术奖励金唯一的一等奖. 获奖题目是:"三角级数之收敛理论",他是唯一获得两次该项奖的数学家.

9月24日　陈省身、苏步青当选为中央研究院第三届评议员.

10月9—11日　平津十二学术团体(中国科学社、中华自然科学社、物理学会、化学会、科学工作者协会、动物学会、植物学会、地质学会、昆虫学会、药学会、数学会、地理学会)联合年会召开. 开幕式在北平中法大学大礼堂举行,到会542人. 会议讨论如何利用科学改善中国人民的生活,并宣读论文(数学组宣读12篇).

10月9—11日　十个学术团体(中国科学社、中华自然科学社、新中国数学会、物理学会、天文学会、气象学会、地理学会、地球物理学会、动物学会、遗传学会)在南京召开联合年会. 开幕式在中央大学礼堂举行,由中大校长周鸿经主持,到会300余人;会议讨论如何发展中国科学;并分组宣读论文(数学组收到论文26篇);在这次年会上,决定正式恢复"中国数学会"名称. 胡敦复、姜立夫、苏步青、范会国、陈省身等出席了这次年会,拟定了会员名单,准备向会员发出改选会员的通知. 此时,由于国内解放战争正在激烈进行,时局很乱,会后忙于各奔东西,改选一事,没有结果. 但"新中国数学会"的名称,从此便取消了.

10月30日　陈省身由宁向沪给范会国写信,"数学会通知书因整理费时,最近方得就绪. 兹另邮附上若干份,旧会员方面乞为斟酌分发,已发通知书之名单附上备考."随信附上"已发通知书者"168位按姓氏笔划排列的名单.

12月31日　陈省身离沪赴美,应聘任芝加哥大学教授.

1949 年

7 月 10 日　中国数学会重新恢复活动. 1949 年 7 月 13—18 日中华全国自然科学工作者代表会议筹备会的正式会议在北京召开，外地来京参加会议的数学工作者和在京部分数学家，于 7 月 10 日在北京师范大学数学系召开“中国数学会在京数学者座谈会”，出席者有：汤璪真、程廷熙、傅种孙、王仁辅、苏步青、曾昭安、郑之蕃、段学复等 20 人. 会议主席是苏步青. 主要决议：(1) 中国数学会会务继续进行；(2) 进行中国数学会会员登记；(3) 推定已解放各地区临时干事，国外由陈省身先生联络；(4) 成立京津区干事分会，以傅种孙、段学复、吴大任、李恩波等 8 人为干事；(5) 由京津区干事分会分函其他各区进行会员登记；等事项.

7 月 14 日　中国数学会在京干事第一次会议在北京中法大学举行. 会议主席苏步青，决议：(1) 拟定数学会出席第一次中华全国科学会议筹备会报告大纲，并推定苏步青代表报告；(2) 推汤璪真（召集人）、刘景芳、申又枨、郑桐荪为司选委员办理：(甲) 选举第一次中华全国科学会议数学代表；(乙) 选举本会理事；(3) 选举理事与各地会员登记同时办理.

1950 年

2 月 11—12 日　十二个自然科学学会（数学会、物理学会、化学会、动物学会、植物学会、生理学会、心理学会、昆虫学会、药学会、地学会、地质学会、海洋湖沼学会）在京举行联合年会，开幕式在北京中法大学举行，到会 599 人. 通过了《自然科学学会

会章》、《北京区自然科学12学会联合年会决议》.

2月11—12日　中国数学会京津分会在“十二自然科学学会联合年会”期间召开. 地点：北京大学理学院，出席者有：汤璪真、郑桐荪、陈荩民、江泽涵、傅种孙、王仁辅、刘亦珩、关肇直等44人. 会议讨论的主要事项有：关于十二个自然科学学会章程的共同原则和中国数学会章程草案的初步修订；傅种孙报告数学会在京津解放后的活动情况；增加1949年7月以后解放各地区的临时干事，请各区临时干事从速成立分会，并选举会员代表；京津两地区由原来的京津分会改组各成立一分会；关于中学数学课程内容的精简问题，大学入学考试必须遵照教育部精简后之中学数学课程标准命题，大学数学系课程问题，以及大学课本编译问题；最后选举出席科学院的代表为：段学复、江泽涵.

2月14日　中国数学会京津临时干事座谈会. 地点：北京师大数学系，出席者：江泽涵、陈荩民、吴文潞、段学复、吴大任、刘景芳、傅种孙、程廷熙共8人，主席为吴大任. 议决主要事项：(1) 关于中国数学会章程草案，共议定14个要点；(2) 关于北京分会章程草案，议定理事会设理事15人，常务理事7人，预定春节期间开成立会；(3) 补推中国数学会各地区临时干事，并请其从速组织各地分会；(4) 京津两分会可举行常务理事会联席会议；(5) 2月11—12日京津分会所议事项，印送各处；(6) 京津分会所提精简数学课程、大学招生命题及师资培养等，均请北京师范大学数学系办理.

3月16日　华罗庚自美国返抵北京.

4月2日　中国数学会北京分会成立. 有会员346人，华罗庚当选为北京分会理事会主席，副主席是赵进义，其他常务理事有：程廷熙、王景慧、管恕、傅种孙、江泽涵. 理事会由15人组成.

4月2日　中国数学会武汉分会成立. 有会员307人，选举产生理事会主任理事为曾昭安.

5月2日　学术名词统一工作委员会成立，分五组，其中自然

科学组由竺可桢、杨钟健分任正副召集人. 数学属于自然科学组.

6月7日　中国科学院呈文政务院文化教育委员会备案，正式成立中国科学院数学研究所筹备处. 筹备处主任委员：苏步青；副主任委员：周培源、江泽涵、华罗庚、许宝騄.

6月11日　中国数学会西安分会成立. 会员90余人，选举产生理事会主席为杨永芳.

6月25日　中国数学会天津分会成立. 会员104人，理事会由13人组成. 主席为刘晋年，副主席为曾鼎禾.

7月1日　武汉分会主办的刊物《武汉数学通讯》创刊. 主任编辑：刘正经. 从1952年起，该刊改名为《数学通讯》.

8月18—24日　中华全国自然科学工作者代表会议在北京举行. 会议期间成立了“中华全国自然科学专门学会联合会”（简称“全国科联”）和“中华全国科学技术普及协会”（简称“全国科普”）两个组织，自此，各自然科学学会（包括中国数学会）接受“全国科联”的领导. 中国数学会各地方分会接受当地科联和本会的双重领导.

8月21日　借外地数学家来京参加“全国科代”会议之机，中国数学会在颐和园召开具有全国代表性的会议. 会议报告称：全国指定设立数学会分会的地区有26处，当时已成立分会的有北京、天津、武汉、青岛、太原、西安，总会敦促尚未成立分会的地区迅速成立. 公推傅种孙、江泽涵、段学复、吴大任、曾昭安、姜立夫等17人为中国数学会常务干事，组成临时常务干事会，办理本会一切事务.

8月27日—9月2日　华罗庚代表我国参加在匈牙利举行的人民民主国家国际数学会议. 会议日期和当时在美国举行的“国际数学家大会”一致，苏联、波兰、捷克、罗马尼亚、保加利亚、东德都派代表参加了这里的会议，而未去美国参加国际数学家大会. 华罗庚在大会上作了题为“一度空间射影几何的基本定理及矩阵几何”的报告；我国学者在分组会议上报告的有：程民德、周

毓麟、迟宗陶、童勤漠、徐献瑜等.

9月　中国数学会南京分会成立. 孙克定任理事长，副理事长：孙光远、曾远荣.

10月　在中国数学会尚未重新正式成立之前，中国科学院编译局委托数学研究所筹备处重新编订数学名词的工作. 学术名词统一工作委员会先后聘任数学名词审查委员，计有：王寿仁、田方增、朱公谨、江泽涵、吴大任、吴文俊、姜立夫、孙光远、陈建功、曾昭安等33人.

12月23日　奉到中央人民政府内务部内社字751号文批复，准予筹备设立中国数学会.

1951年

3月　《中国数学学报(新刊)》(Journal of the Chinese Mathematical Society (New Series)) 创刊. 该刊是1936年中国数学会创办的学术性期刊《中国数学会学报》的继续，仅刊载具有创作性的论文. 这次重新创刊的第1卷（季刊）全用外文发表（附中文摘要）. 总编辑：华罗庚，编委有：陈建功、申又枨、段学复、张禾瑞、苏步青、江泽涵、赵访熊、周培源、关肇直、李俨、许宝騄，这届编委会任期从1951年至1956年.

4月7日　中国数学会桂林分会成立. 有会员33人，理事长为魏保瑜.

5月13日　中国数学会兰州分会成立. 有会员79人. 常务理事会主席为段子美，副主席为郑鍙年.

5月31日　中国数学会长春分会成立. 有会员134人，理事长为张德馨，副理事长为杨春田、赵庆方.

6月3日　中国数学会杭州分会成立. 有会员50人，理事会主席为苏步青，副主席为裘颂兰.

7月8日　中国数学会临时干事会推选12人组成“中国数学会第一次全国代表大会筹备委员会”，推定王寿仁、马良、陈杰为正副秘书长，组成秘书处，办理大会的一切事务.

7月31日　完成中国数学会重新筹组工作，写成《中国数学会重新筹组经过》一文，发表在《中国数学杂志》第1卷第1期.文中关于召开代表大会作了两点重要说明：第一，全国科联规定代表大会的任务是：①宣布学会正式成立；②通过学会会章；③决定学会任务和工作计划；④选举；⑤其他有关会务事项.若欲交流学术经验，可另举行年会.第二，本届代表的名额和产生办法，均依照全国科联的规定，代表共78人，其中由各分会按照会员人数比例选出54人，占69.2%，由临时常务干事会推举代表14人，占18%，特邀代表10人，占12.8%.

8月15—20日　中国数学会第一次全国代表大会在北京举行，实到代表63人，代表了全国两千多名会员.大会主席团成员有：华罗庚、陈建功、曾昭安、程其襄、何鲁、段子美、吴大任、傅种孙、江泽涵、杨春田.16日开幕式上宣布中国数学会正式重新成立.

大会讨论并通过了《中国数学会章程》；讨论了关于学报期刊的编辑出版，数学论文调查，名词翻译，中学、大学数学课程改革及教学问题，各地分会成立等各项工作；座谈了如何贯彻爱国主义教育，理论联系实际，辩证法与数学等问题.

代表大会选举产生了21名理事组成的理事会，推定9人为常务理事，华罗庚当选为理事长，江泽涵、陈建功当选为副理事长.

10月2日　中国数学会贵阳分会成立.有会员58人，理事会主席为萧文灿，副主席为赵咸云.

11月　《中国数学杂志》创刊，毛泽东主席题写了刊名.该刊是1936年中国数学会创办的普及性期刊《数学杂志》的继续.第1卷第1期和第2期的总编辑是：华罗庚、傅种孙，从第1卷第3期起至1957年总编辑是傅种孙.编委会成员包括编辑、特约

编辑和各分会专推编辑三部分组成. 创刊号发表9篇文章，作者是：华罗庚、王湘浩、程纶、章鸿钊（2篇）、松村勇夫、路见可、孙梅生和韩焕堂、袁兆鼎.

本年　中国数学会常务理事会关于三个委员会的决议：(1)研究委员会“是统一计划全国数学研究工作的机构，本会的委员们分散各地，除参加本委员会的计划工作外，并负责推动计划的实行.”（2）编译委员会“是统一领导制定数学书籍编译计划，并且由本会直接与各地会员联系及接洽具体工作.”（3）教学委员会“是统一计划全国数学教育工作的机构，并负责领导与推动各分会来担任有关数学教育的工作.”

1952年

7月17日　中国科学院数学研究所在北京正式成立. 研究内容除注意国内较有基础的专业分支外，同时开始重视应用数学和基础薄弱分支的发展. 首任所长华罗庚是1951年1月政务院第69次政务会议批准任命的.

12月　《中国数学学报（新刊）》从第2卷起改名为《数学学报》，外文名称从第3卷起改为《Acta Mathematica Sinica》. 改名后，论文概用中文发表，附外文摘要.

12月　中央教育部颁布《中学数学教学大纲（草案）》.

1953年

2月　为了和全国科联所领导的其他学科普及性刊物称为“通报”一致起见，《中国数学杂志》从1953年第1期起改名为《数学通报》.

7月17日　中国数学会常务理事会决定：于1953年9月召开一次学术讨论会，上报全国科联审批. 全国科联于8月19日批准，并指示：以学习苏联展开学术活动为原则.

9月1—7日　中国数学会在北京师大北院召开了以分析为主的学术讨论会. 参加者以京津两地的数学家为主，出席34人，列席18人. 华罗庚致开幕词. 陈建功、庄圻泰、李国平、闵嗣鹤、余家荣、杨宗磐、华罗庚、申又枨、萧树铁、吴新谋、戴遗山、曾远荣、关肇直等14人作了15个关于复变函数论、微分方程论、泛函分析三个方面研究成果的专题报告. 龚昇、夏道行、陈建功、秦元勋、李国平、吴德涛、胡和生、赵访熊、吴新谋、徐利治等宣读了17篇论文. 苏步青作总结报告，认为这次会议很成功，是全国数学界开展学术讨论的一个良好开端.

9月　中央教育部颁部《师范学校数学教学大纲（草案）》.

12月23日　华罗庚受邀请到第12届（1954年）国际数学家大会作半小时讲演，因故终于未能成行.

12月27日　中国数学会昆明分会成立. 有会员47人，理事长为王士魁，副理事长为蒋硕民.

1954年

1月　中国数学会厦门分会主办的《厦门数学通讯》创刊. 编委会成员有：方德植、李文清、林振声、魏祖烈、张鸣镛、林鹏程，该刊以中学教师为主要对象. 至1958年10月，共出刊17期后停刊.

2月　中国数学会北京分会组织“中学数学星期讲习会”. 讲习会的目的是帮助中学数学教师提高业务知识水平. 报告人是高等数学专家和对中学数学有特别研究的专家；报告内容围绕着中等数学知识.

4月15日　中国数学会西安分会主办的《数学学习》创刊. 编辑委员会主任：刘亦珩；副主任：张玉田、夏自强、潘智源. 该刊以中学数学教师为主要对象，季刊，1955年3月出完第1卷共4期后停刊.

4月27日　根据中匈文化协定1954年执行计划，匈牙利数学家杜澜·巴尔(Turán Pál)院士应我国邀请于4月27日抵达北京，中国数学会参与接待和组织学术交流.

5月5—8日　中国数学会借杜澜·巴尔在北京、上海、武汉访问期间，在三地组织学术报告会. 京津数学工作者：申又枨、秦元勋、杨宗磐、吴文俊、张素诚、王寿仁、赵仲哲、王世强、闵嗣鹤、庄圻泰、严志达、华罗庚等共宣读论文12篇. 沪宁杭数学工作者：叶彦谦、曾远荣、徐瑞云、钱宝琮、董光昌、周怀衡、夏道行、龚昇、陈建功等共宣读论文11篇. 武汉数学工作者李国平、曾宪昌、曾昭安、余家荣等共宣读论文6篇.

6月27日　中国数学会天津分会组织学术讲演会. 根据会员要求，特请中科院数学所研究员闵乃大作近似计算方面的报告，阐述近似计算的重要性，计算数学和理论数学在处理问题中的区别等等.

10月9日　苏联科学院主席团委员、莫斯科大学校长、数学家伊·格·彼得罗夫斯基(И. Г. Петровский)来我国参加国庆观礼并访问期间，10月9日被邀请到中国科学院作学术报告，华罗庚代表中国数学会致欢迎词；彼得罗夫斯基报告的主题是“波动方程的异解”. 报告结束后，还与京津两地的数学、物理学家50余人会面并进行座谈.

12月　中央教育部颁布《中学数学教学大纲(修订草案)》. 是在1952年颁布的《中学数学教学大纲（草案)》的基础上修订而成. 中国数学会理事程廷熙著专文“中学数学教学大纲的草案与修订草案的比较”(发表在《数学通报》1955年第3期上)，对两者之间的异同作了说明.

1955年

4月下旬　根据中波文化协定，波兰科学院数学研究所所长K. 库拉托夫斯基院士来我国访问，在北京、上海、武汉等市作学术报告.

5月中旬　根据中保文化协定，华罗庚去保加利亚访问. 访问期间华罗庚在数论、矩阵几何及其在代数上的应用、多元复变函数论诸方面作了学术报告.

5月　中国数学会上海分会中学数学研究委员会，组织上海市数学教师编写一套中学数学教学参考书，共33本. 其中“高中数学教学参考书”19本，“初中数学教学参考书”14本，至1956年出齐.

5月　《数学进展》创刊. 该刊主要登载数学中各分支的综述性文章. 华罗庚任主编，编委会成员有：王湘浩、王寿仁、申又枨、江泽涵、许宝騄、关肇直、苏步青、陈建功、李国平、李俨、张禾瑞、周培源、柯召、段学复、赵访熊. 年出4期为一卷，第1卷共发表25篇文章，其中有：闵嗣鹤著“数论在中国的发展情况”；段学复著“近代中国数学家在代数方面的贡献”；陈建功著“单叶函数论在中国”等综述文章.

6月3日　王湘浩、华罗庚、江泽涵、许宝騄、苏步青、李国平、陈建功、柯召、段学复当选为中国科学院学部委员. 6月1—10日，中科院学部在北京召开成立大会，宣告正式成立四个学部：数学物理化学部、生物地学部、技术科学部、哲学社会科学部；公布第一批学部委员名单共233人，其中属自然科学方面的学部委员172人.

12月11日　由中国数学会发起，高等教育部、教育部同意，1955年12月11日在北京成立“数学竞赛委员会”，选出华罗庚、

傅种孙、段学复等12人为委员，并推选华罗庚为委员会主席．决定1956年先在北京、天津、上海、武汉四大城市试办由中学高年级学生参加的“中学生数学竞赛”，待取得经验后，再逐步推广．议定竞赛的程序是：先根据“数学竞赛委员会”编印的小册子中的数学题目，测验自己的数学程度；然后参加本校的竞赛，再由各校选送若干名参加全市性的数学竞赛．各市竞赛的时间和办法由各市自行决定．竞赛委员会的地址设在：北京市东黄城根甲42号中国科学院编译局内．

12月22日　《中国青年报》发表华罗庚的文章：“数学竞赛是青年的一个喜讯”．

1956年

1—3月　北京、天津、上海、武汉相继成立市数学竞赛委员会．《数学通报》、《数学教学》、《数学通讯》纷纷发表一些著名数学家介绍有关数学竞赛的文章，动员青年学生积极参加竞赛．著文的有：华罗庚、段学复、苏步青、李锐夫、曾昭安、路见可等．

2月22—28日　南亚数学教育会议在印度孟买举行．参加会议的有22个国家的53位代表，我国应邀出席的代表是段学复，龚昇随同前往．会议主要讨论南亚数学教育、尤其是高等数学教育问题．会间有9国代表共作了10个报告，段学复在报告中着重介绍了我国高等数学教育的概况．会后在参观孟买、加尔各答的大学数学系和研究所中，段学复应邀介绍了：“中国数学家在代数方面的贡献”和“中国数学研究的一些情况”等．

5月4日　武汉市举行数学竞赛授奖大会．武汉市数学竞赛委员会于1月29日成立后，组织由各校选拔的5%的高三优秀学生参加市区竞赛，参赛者共有17个单位，208名选手，4月15日分别在武昌汉口两地同时举行．评选出优胜学生21名，其中甲等

5 名，乙等 8 名，丙等 8 名.

5 月 13 日　北京市举行数学竞赛授奖大会. 首次北京市中学生数学竞赛，共有 62 所学校的 622 名选手参赛. 授奖会后，由华罗庚、陈建功、傅种孙、段学复、江泽涵等分别给同学们分析和讲解这次的竞赛试题及其有关知识.

5 月 27 日　天津市举行数学竞赛授奖大会. 首次天津市中学生数学竞赛，共有 499 名选手参赛，最后评出优胜者 25 名.

6 月 10 日　上海市举行数学竞赛授奖大会. 3 月，中国数学会上海分会理事会决定上海市第一届中学生数学竞赛只限于本届高三学生，聘请陈传璋、李锐夫、孙泽瀛等 17 位为竞赛委员会委员，陈传璋为主席. 竞赛过程分初赛、复赛、决赛三个程序. 初赛由各校于 4 月 21—28 日进行完毕，从中选出不超过该校高三 5%的学生参加复赛；复赛有 118 所学校的 713 名选手于 5 月 12 日进行，从复赛中录取了 41 名优胜者参加决赛.

6 月 25 日—7 月 4 日　我国代表华罗庚、钱学森、李俨、陈建功、吴文俊、黄昆、程民德、关肇直、冯康出席第三届全苏数学会议. 这次会议共有来自苏联各地的两千多位代表和 16 个国家的 60 多位外宾. 大会分 13 个组进行学术交流，共宣读论文 800 多篇，其中有外国的论文约 50 篇. 我国代表宣读的论文有：华罗庚的“多复变数典型域上的调和分析”和“论 Tarry 问题”；钱学森的“论 PLK 方法”；吴文俊的“论多面体在欧氏空间的实现”；陈建功的“Faber 多项式逼近的 Cesaro 收敛”；李俨的“中国数学史中的几个问题”等.

7 月　教育部编订《中学数学教学大纲（修订草案）》(1956—1957 年度). 这个大纲是根据 1954 年 12 月颁发的大纲修订草案，再加以修订后重新颁发.

8 月 13—19 日　中国数学会论文宣读大会. 这是中华人民共和国成立以来，第一次全国规模的数学论文宣读大会，出席会议的代表百余人，共宣读论文 170 余篇，综合报告共有 15 个，报告

人有：华罗庚、苏步青、张世勋、杨宗磐、闵乃大、胡世华、王湘浩、陈建功、程民德、钱宝琮、吴文俊、廖山涛、李国平、吴新谋、秦元勋．他们在不同方向上综合地介绍了自己以及与此有关的人的研究成果，及其有关方向的发展远景，也提出了存在的问题．分组报告分六个组进行：①数论代数组，②几何拓扑组，③函数论组，④微分方程和积分方程组，⑤泛函分析、概率论和数理统计、计算数学组，⑥数理逻辑、数学基础和数学史组．论文的作者中相当一批是新成长起来的青年数学家，如：王元、陈景润、尹文霖、严士健、丁石孙、万哲先、谷超豪、夏道行、陆启铿、张里千等．

10月10—15日　苏步青、吴文俊赴索非亚参加保加利亚数学会年会．这次年会共宣读论文66篇，其中有19篇是外国代表宣读的，我国代表苏步青在大会上宣读了"面积空间几何学"的论文．

10月25日—12月15日　为执行中德文化合作协定，苏步青到民主德国的洪堡大学数学研究所、卡尔·马克思大学数学系、格来夫斯瓦尔特大学数学系等单位讲学．

10月　华罗庚著《从杨辉三角谈起》(3.8万字)、段学复著《对称》(2.1万字)出版，这些是专门为中学生数学竞赛而写的科普读物，作为《数学通报丛书》的第1、2册．

1957年

1月24日　华罗庚、吴文俊、苏步青荣获首届（1956年度）自然科学奖．这是中华人民共和国成立以来，首次颁发的自然科学奖，共评选出得奖的研究成果34项，其中一等奖3项，二等奖5项，三等奖26项．获奖者荣获金质奖章、奖状和奖金，奖金分别为一万元、五千元、二千元．华罗庚的"典型域上的多元复变

数函数论”和吴文俊的“示性类及示嵌类的研究”获一等奖；苏步青的“K展空间和一般度量空间的几何学、射影空间曲线论”获二等奖.

4月—5月　1957年的中学生数学竞赛，在北京、天津、上海、武汉与南京五城市举办.

5月23日　吴文俊增聘为中国科学院学部委员.

5月23—30日　陈建功、华罗庚、吴文俊等在中科院学部委员会第二次全体会议上宣读论文. 在这次会上各学科总共宣读学术论文70多篇. 吴文俊就“在欧氏空间中的实现问题”作了报告，内容包括他获奖以后继续研究得到的新成果；华罗庚报告“关于堆垒素数论的一些结果”. 青年数学家王元、谷超豪、冯康、夏道行等，分别在解析数论、广义微分几何、广义函数论、单叶函数论方面宣读了他们的论文.

1958年

4—6月　上海、武汉和福州三市在高三学生中举办数学竞赛.

6月　吴文俊收到邀请在第13届国际数学家大会的分组会上作报告，因故而未能成行.

7月25日　中国数学会常务理事会召开会议，认为：在面临“鼓足干劲、力争上游，多快好省地建设社会主义”的新形势下，应该召开一次数学会年会. 常务理事会一致决议1958年年会的内容为：“（1）讨论并通过全国数学界工作跃进纲要，作为今后大家工作的方向，讨论全国数学发展远景规划，在总路线的指导下，对发展数学科学的一般原则进行讨论，为今后修订远景规划打下思想基础；（2）对本会会务、会章交换意见；（3）讨论本会新办刊物的问题.”这次会议将采取“大鸣、大放、大字报、大辩论”

的方式.

8月7日 中国数学会就关于召开1958年年会向各地区分会发出通知. 通知要求:"各分会召开会员大会或扩大理事会,推举参加本次年会的会员,并对全国数学界工作跃进纲要草案的方向、原则和具体指标措施进行讨论."但此次年会最终因故取消.

9月25日 中华人民共和国科学技术协会在北京成立. 简称"中国科协",是由中华全国自然科学专门学会联合会("全国科联")和中华全国科学技术普及协会("全国科普")合并组成的. 从此,中国数学会接受中国科协领导.

10月1日 中国数学会天津分会主办的《红旗数学汇刊》创刊. 季刊. 一共出了5期,于1959年10月出至第5期后停刊.

11月 《数学进展》在第4卷第4期封底,刊登一则声明:"本刊自1959年起改为不定期的《数学进展丛书》,原来按季出版的《数学进展》不再继续刊行,特此声明. 数学进展编辑委员会". 但丛书从未问世.

1959年

10月 为纪念中华人民共和国建国十周年,华罗庚发表文章:"十年来中国数学研究工作的概况". 文中公布了一组对比数字:解放前我国发表过数学论文的总人数有74人,共发表652篇论文,其中大多数发表在国外的数学刊物上;解放后十年中有342人仅在国内刊物上就发表论文983篇. 该文用较多篇幅逐个介绍了数学各分支十年来的研究工作概况.

12月 《数学通报》编委会将该刊自1951年起至1959年中的文章,选其质量较好的,按性质分成数学知识介绍和中等数学教学两部分,编辑成《数学通报丛书》,由科学技术出版社从1959年12月起陆续出版. 数学知识介绍有:《线性代数多项式》等8本;

中等数学教学有:《中学数学教学的一般问题》等3本. 丛书全套共13本.

1960年

2月24日—3月4日　中国数学会第二次全国代表大会在上海举行. 来自各地的正式代表128人，列席代表43人，教育部、中国科协等单位都派人出席了会议. 这次大会集中讨论我国数学发展方向和根本改革各级各类学校的数学教学问题,改选理事会. 24日上午苏步青致开幕词，华罗庚作中国数学会八年多来的工作报告. 29日前为会议的第一个议程：讨论数学发展方向，关肇直作了关于数学发展方向的发言. 从3月1日起，会议进入第二个议程，讨论根本改革各级各类学校的数学教学问题. 大会选举产生了中国数学会第二届理事会.

3月4日　第二届理事会选举产生了常务理事会及理事长：华罗庚，副理事长：苏步青、陈建功、江泽涵，秘书长关肇直，副秘书长王寿仁.

4—5月　上海市举办第四届中学生数学竞赛. 这次竞赛分：初中三年级、高中一年级、高中三年级共三个年级分别进行. 与往届不同的是,命题工作除教师外还吸收了部分高年级学生参加.

8月19日　中国数学会武汉分会主办的《数学通讯》,从1950年7月起办刊10年共出112期之后，因纸张亟缺被迫停刊.

1961年

7月　《中央关于自然科学研究机构当前工作的十四条意见》发表.

8月　在中国数学会理事会的支持下，上海科技出版社开始翻译出版一套《现代应用数学》丛书. 原书由日本岩波书店出版，全套共60册. 经过整理，中译本合并为42册，历时四年，至1965年8月出完全套.

本年　中国数学会在颐和园龙王庙分别召开全国数论、拓扑、函数论等学科会议，报告学术论文，讨论学科发展方向.

1962年

4月　《数学进展》复刊，仍为季刊. 复刊后，在上海、长春、天津、武汉、厦门、成都、杭州、广州等城市均设立数学进展编辑分部，稿件可以就近投递.

4—5月　北京市举办1962年中学生数学竞赛. 华罗庚出任竞赛委员会主席，副主席是北京市数学会正、副理事长：江泽涵、吴文俊. 竞赛前还由吴文俊、段学复、华罗庚对北京市数学爱好者分别举办了三次数学知识报告会. 这次竞赛分高二、高三两个年级分别举行，共有100所中学的1465名学生参赛，得奖学生82名，其中高三45名，高二37名.

9月4日晚　首都60多位著名科学家在政协礼堂祝贺熊庆来70寿辰. 中国数学会理事长华罗庚特地向他的老师祝贺，他说：熊庆来教授循循善诱、诲人不倦的教学精神和老当益壮的工作作风，已在我国科学事业中起了积极的影响. 庄圻泰在会上介绍了熊在函数论方面的主要研究成果. 熊庆来在致答词中说：目前自己还感到“不知老之将至”.

9月19日　首都数学界集会纪念法国数学家布·帕斯卡逝世300周年. 中国数学会副理事长江泽涵在会上报告了帕斯卡的生平和他在数学上的贡献.

10月　北京市数学会组织出版一套通俗数学读物“青年数学

小丛书”．全套共 8 本：《从杨辉三角谈起》（华罗庚），《对称》（段学复）、《从祖冲之的园周率谈起》（华罗庚），《力学在几何中的一些应用》（吴文俊），《平均》（史济怀），《格点和面积》（闵嗣鹤）、《一笔画和邮递路线问题》（姜伯驹），《从刘徽割圆谈起》（龚昇）．由中国青年出版社从 1962 年 10 月起陆续出版．

1963 年

4—5 月　中国数学会与北京市数学会联合举办的北京市 1963 年中学生数学竞赛，仍分高二、高三两个年级进行，各测两试，第一试着重于基础知识和基本技能的训练；第二试着重于知识的灵活运用．1963 年，南京市和杭州市分别在高三学生中也举办了数学竞赛．

1964 年

2 月　人民教育出版社开始出版由北京市数学会组编的《数学小丛书》．这套书的前 8 本，是 1962 年 10 月起由中国青年出版社出版的《青年数学小丛书》，此次共出 14 本，后 6 本是：《几种类型的极值问题》（范会国），《从孙子的“神奇妙算”谈起》（华罗庚），《等周问题》（蔡宗熹），《多面体的欧拉定理和闭曲面的拓扑分类》（江泽涵），《复数与几何》（常庚哲、伍润生），《单位分数》（孙琦）．

4—5 月　北京市举办 1964 年中学生数学竞赛．仍分高二、高三两个年级进行．1964 年举办高二、高三数学竞赛的还有江苏省的部分城市．

1966 年

7 月 12 日　《数学通报》停刊. 从 1951 年 11 月至 1966 年 7 月的 16 年间，该刊共出 158 期，发表文章 2,146 篇共载 7,630 页，累计发行 7,167,525 册.

7 月 15 日　《数学进展》停刊. 从 1955 年 5 月至 1966 年 7 月的 11 年间，该刊曾于 1959—1961 年停刊三年，共出刊 9 卷合计 36 期，发表综述性文章和论文共 335 篇载 4,860 页，累计发行约 87,208 册.

7 月 20 日　《数学学报》停刊. 从 1951 年 3 月至 1966 年 7 月的 16 年间，该刊共出刊 16 卷合计 67 期，发表论文 665 篇载 8,697页，累计发行约 204,496 册.

从此以后，由于“文化大革命”，中国数学会的一切活动被迫中断长达 12 年之久.

1971 年

4 月　《数学的实践与认识》创刊，季刊.

1973 年

3 月　《数学学报》复刊，季刊.

《数学的实践与认识》和《数学学报》在 1976 年以前同属一个编辑组，其成员有：张素诚、吴文俊、孙永生、王光寅、戚征.

1976 年

5 月 3—27 日　以数学家麦克莱因（S. Maclane）为团长的 11 人组成的美国纯粹数学与应用数学代表团访问我国．代表团在北京、上海、大庆等地广泛调查了中国纯粹数学与应用数学的发展情况，并与我国学者进行了广泛的学术交流，我国数学家作了 60 多次学术报告，美国数学家作了 20 多次学术报告．

8 月　《应用数学学报》创刊，季刊．主编为张素诚，编委有：王光寅、成平、朱永津、李文林等 15 人．

1978 年

春季　中国数学会开始恢复活动．以理事长华罗庚为首的命题组为当年中国科协、教育部与共青团中央联合举办的北京等八省市中学生数学竞赛做命题和评奖等工作．

夏季至秋季　几次召开常务理事会（扩大）会议，讨论当年召开年会的筹备工作．

11 月 20—30 日　在四川成都市召开了“中国数学会 1978 年年会”（即“中国数学会第三次全国代表大会”）．理事长华罗庚主持了这次年会并作开幕词与闭幕词，来自各省、自治区与直辖市数学会的 470 多名代表，以及 20 多位新闻、出版单位的同志参加了大会．这次年会收到的学术论文有 500 多篇，其中 9 篇在全体大会上作了报告，400 篇论文在 11 个分组会上进行了交流．

大会决定支持并指导《中国大百科全书·数学》卷的编撰工作，组成“数学卷”编委会，华罗庚、苏步青任主编．

在这次代表大会期间，召开了扩大的理事会会议，通过民主

协商，增补了一批理事，理事总数达96人，组成了中国数学会第三届理事会.

1979年

3月5—10日　在浙江杭州市召开中国数学会第三届理事会第一次会议（即“杭州会议”）. 出席会议的理事有73名，理事长华罗庚、副理事长苏步青、江泽涵主持这次会议. 通过充分讨论，这次理事会会议修改并通过新的中国数学会章程. 应有关单位和一些地区的要求，通过民主协商，又增补6名理事（总数达102名）. 会议通过民主选举，增补常务理事6名，副理事长4名，副秘书长1名. 增补后的中国数学会理事会的领导机构：理事长为华罗庚，副理事长为苏步青、江泽涵、柯召、吴大任、吴文俊、齐民友，秘书长为孙克定，副秘书长为王寿仁、林建祥.

这次理事会会议认真讨论了数学会的工作、理事们对学会工作的各个方面，特别是对开展国内外学术交流、编辑出版工作、数学普及工作、数学教学和数学竞赛等，都提出了许多重要的意见和建议. 组建了学会各工作委员会并推选了各工作委员会召集人：学术工作委员会为华罗庚，编辑出版工作委员会为张素诚，普及工作委员会为孙树本，数学教育工作委员会为丁尔升，国际交流工作委员会为潘纯.

这次理事会会议上，还推选了中国数学会出席（1980年3月召开的）中国科协第二次全国代表大会的6名代表：华罗庚、苏步青、江泽涵、柯召、齐民友、王寿仁.

7月　《数学通报》复刊，由中国数学会和北京师范大学合办.

11月22—28日　在广州市召开了计算数学学会第一届年会. 正式宣布成立中国数学会计算数学学会，理事长为赵访熊，副理事长为冯康、徐献瑜、周毓麟，计算数学学会办事机构设在中

国科学院计算中心.

本年　中国数学会支持召开的学术会议有 14 个，1076 人参加会议，交流的学术论文有 880 篇.

1980 年

4 月 22—26 日　在山东济南市召开全国运筹学学术交流会议，理事长华罗庚主持这次会议，正式宣布成立中国数学会运筹学会，华罗庚任运筹学会理事长，越民义、许国志、余潜修任副理事长，运筹学会办事机构设在中国科学院应用数学研究所.

8 月 8—17 日　80 年国际数学教育大会在美国加利福尼亚大学伯克莱分校举行，以中国数学会理事长华罗庚为首五人组成的中国代表团参加了这次大会，华罗庚应邀在大会上作了“在中华人民共和国普及数学方法的个人体会”的一小时报告.

8 月 14—19 日　中国数学会普及工作委员会第一次会议在辽宁省大连市举行. 来自各省、自治区与直辖市数学会和学科分会的 30 多位代表参加了这次会议，同时还邀请了中国科协、教育部和一些出版社的从事数学普及工作的同志参加这次会议. 会议交流总结了建国以来开展数学普及工作的经验与教训，讨论提出了今后开展数学普及工作的方针与任务. 特别是对组织和开展我国的中学生数学竞赛，提出了“民办公助，自愿参加，精简节约”的原则.

11 月 12—17 日　在天津召开全国概率论学术会议，会上正式宣布成立中国数学会概率统计学会.

本年　中国数学会支持召开的学术会议有 8 个，765 人参加会议，交流的学术论文有 657 篇.

1981年

5月　在北京召开全国数学竞赛经验交流会，十多个省市数学会介绍了开展数学竞赛的情况与经验，会议决定举办“省、直辖市、自治区联合高中数学竞赛”(简称“联赛”). 10月举行了高中“联赛”(25个省市自治区参加).

8月　在大连召开了首届全国数学史学术讨论会，会上正式宣布成立中国数学会数学史分会，推举严敦杰为分会理事长.

8月　《数学进展》复刊.

10月　《中学生数学》创刊，由中国数学会普及工作委员会与北京数学会、北京师范学院联合主办.

12月16日　在北京召开中国数学会常务理事会会议，华罗庚理事长主持这次会议. 会议总结了1981年的学会工作，讨论了1982年的学会工作计划. 这次会议决定原计划1982年召开的年会(即代表大会)延至1983年举行，1982年召开一次理事会会议. 会上宣读了秘书长孙克定致理事长华罗庚的信，因体弱多病请求辞去秘书长职务，常务理事会同意了他的请求，决定由副秘书长王寿仁代理秘书长职务.

本年　中国数学会支持召开的学术会议有14个，1300多人参加会议，交流的学术论文有800多篇.

1982年

2月3日　在北京召开了常务理事会扩大会议，理事长华罗庚主持了这次会议，苏步青、江泽涵、吴大任、齐民友等常务理事和一些理事，以及参加《应用数学学报》编委会会议的一些数

学家也出席了这次会议. 会议讨论了当年召开理事会会议以及次年将召开的年会（即代表大会）的筹备工作，并讨论了本会当年的国内外学术交流计划.

6月25—30日　在云南昆明召开第二次普及工作会议，各省市自治区数学会的代表和12家出版社的同志参加了会议. 会议交流并总结了各地开展数学普及工作的经验，并着重讨论了数学竞赛工作，重申首次普及工作会议提出的举办数学竞赛应遵循“民办公助，自愿参加，精简节约”的原则，确定今后每年10月中旬的第一个星期日上午举行全国高中数学竞赛.

8月8—9日　应国际数学联盟（IMU）秘书长J. L. Lions的邀请，王寿仁和杨乐代表中国数学会列席了在波兰华沙召开的IMU会员代表大会，并与IMU的领导人商讨了中国数学会加入IMU的方案.

9月9日　在北京召开常务理事会会议，华罗庚理事长主持这次会议，出席的有苏步青、江泽涵等. 这次会议主要讨论即将召开的理事会会议的筹备工作，以及如何办好各种数学学术刊物等问题. 为了加强中国数学会日常工作领导力量，以开好当年的理事会会议及次年将召开的全国代表大会，这次常务理事会会议决定增补杨乐为副秘书长.

9月21—27日　在辽宁沈阳市召开中国数学会第三届理事会第二次会议（即“沈阳会议”），出席的理事和特邀代表有近百人. 理事长华罗庚因病缺席，从北京医院给大会发了贺电，副理事长苏步青、柯召、吴大任和齐民友主持了这次会议. 在这次会议上，苏步青致开幕词，秘书长王寿仁代表常务理事会作工作报告，柯召作闭幕词. 这次理事会会议着重讨论了我国的数学发展和数学教育问题，讨论了将于次年召开的中国数学会全国代表大会的筹备工作等问题. 会上还安排了12个综合性学术报告，介绍了应用数学和纯粹数学某些方面的进展情况. 会议对如何加速发展我国的应用数学，关心和促进我国数学教育水平的提高，进行

了认真的讨论并提出了不少有益的建议. 这次会议决定创办《中国数学会通讯》，设立中国数学会秘书处，加强数学会的日常领导与组织管理工作.

10月　国际数学联盟（IMU）主席卡尔松（Carleson）访华，中国数学会领导人会见了卡尔松并商讨了中国数学会加入IMU的方案等问题.

本年　中国数学会支持召开的学术会议有16个，1956人参加会议，交流的学术论文有1812篇.

1983年

3月　《中国数学会通讯》创刊.

4月2—15日　应日本数学会理事长藤田宏的邀请，以副理事长苏步青为首的中国数学会代表团访问日本，代表团成员有王元与胡和生. 代表团参加了日本数学会春季年会，并应邀在年会上分别作了一小时学术报告，会后访问了广岛、大阪、京都、东京、仙台等地.

5月　中国数学会普及工作委员会在安徽省屯溪召开"数学竞赛命题工作会议"，总结了数学竞赛命题工作的经验，并明确规定中学数学竞赛试题的范围不得超出现行教学大纲.

10月22—27日　中国数学会第四次全国代表大会在武汉市举行. 副理事长柯召、吴大任、吴文俊、齐民友主持了大会，柯召致开幕词，吴大任致闭幕词，王寿仁秘书长代表理事会作工作报告. 参加这次大会的代表有260人，收到的学术论文有350多篇，会议进行了广泛的学术交流，12位学者在大会上作了综合报告，214篇论文在13个分组会上作了报告. 代表们讨论了数学会的工作，提出了很多有益的意见和建议. 这次代表大会讨论并通过了新的会章. 大会选举产生了89名理事组成的中国数学会第四

届理事会（会后经常务理事会讨论通过增补了8名理事）. 大会决定设立荣誉职务，推选华罗庚、苏步青、江泽涵、柯召、吴大任为名誉理事长，推选吴新谋、赵访熊、李国平为名誉理事.

10月28日　中国数学会第四届理事会第一次会议在武汉市召开，60名理事出席，齐民友主持会议. 这次会议讨论了本会工作，推定了各工作委员会的负责人：学术交流工作委员会为张恭庆，国际交流工作委员会为王元，编辑出版工作委员会为丁夏畦，普及工作委员会为孙树本，教育工作委员会为丁尔升、姜伯驹，数学名词审定工作委员会为田方增，咨询服务部为方开泰，学会办公室为任南衡. 会议决定吴文俊等10人组成工作班子，负责选举常务理事会的工作，并决定采取通讯选举方式由全体理事无记名投票产生常务理事会.

12月　通讯投票选出常务理事19名.

本年　中国数学会支持召开的学术会议有10个，1151人参加会议，交流的学术论文有1052篇.

1984年

1月11日　在北京召开第四届常务理事会第一次会议，召集人吴文俊主持会议. 这次会议通过民主协商，提出了正副理事长、正副秘书长候选人名单，并决定由全体理事用无记名通讯投票方式进行选举. 这次会议决定聘任任南衡为专职副秘书长.

1月　通讯投票选出第四届理事会的领导机构：理事长为吴文俊，副理事长为王元、谷超豪、胡国定、程民德，秘书长为杨乐，副秘书长为林建祥.

2月7日　在中国科学院数学研究所召开“1984年春节学术座谈会”，40多位数学家出席，理事长吴文俊主持. 座谈的主题是“世界新的技术革命”和我们的对策，“2000年的中国”展望，数

学与新的技术革命的关系，与信息社会的关系.

5月24日　第四届常务理事会第二次会议在北京举行，理事长吴文俊主持会议. 这次会议讨论决定，次年在上海举行中国数学会50周年年会，隆重纪念本会成立50周年.

6月　《Acta Mathematicae Applicatae Sinica》即《应用数学学报》外文版创刊.

7月6日　数学名词审定工作委员会在北京召开第一次会议，委员会主任田方增主持会议. 会后即开展数学名词审定工作.

11月15—20日　本会在浙江宁波市举行第一次学会工作会议，27个省、直辖市与自治区数学会和学科分会的67名代表参加会议. 这次会议交流了各地开展学会工作的情况和经验，讨论了学会工作的改革等问题.

11月15—20日　本会在浙江宁波市召开第三次普及工作会议，27个省市区和10个出版单位的代表参加会议. 这次会议对近四年来的中学联合数学竞赛进行了总结，确定每年的高中"联赛"在十月中旬的第一个星期天举行. 会议决定自85年起举办初中"联赛"，在每年四月中旬的第一个星期天举行. 两个"联赛"分别由各省、直辖市与自治区数学会轮流主办.

12月17日　第四届常务理事会第三次会议在北京举行，理事长吴文俊主持会议. 这次会议主要讨论次年纪念中国数学会成立50周年活动的计划. 会上讨论提出了本会出席(1986年6月召开的)中国科协第三次全国代表大会的代表候选人名单，以及向中国科协推荐的下届全国委员会候选人的候选人名单，决定由全体理事用无记名通讯投票的方式，差额选举产生.

12月　生物数学专业委员会成立，主任为陈兰荪.

本年　中国数学会支持召开的学术会议有16个，参加会议的有1841人，交流的学术论文有1575篇.

1985年

1月　通讯投票选出本会参加中国科协“三大”的代表：王元、吴文俊、杨乐、齐民友、胡国定、李大潜，以及中国科协委员候选人：王元、吴文俊、杨乐.

2月11日　在北京科学会堂举行春节座谈会，理事长吴文俊主持会议，首都数十位数学工作者出席，对如何搞好中国数学会成立50周年纪念活动等议题进行了热烈的讨论.

3月23日　在北京大学数学系举行了高等院校数学教育改革座谈会，本会教育工作委员会主任姜伯驹主持会议. 这次会议交流了北京地区理工科大学数学教育改革的情况和经验，讨论了大学数学教学改革等问题，提出了一些有益的意见和建议.

3月26日　第四届常务理事会第四次会议在中科院数学所召开，吴文俊理事长主持会议. 会议决定设立“陈省身数学奖”，讨论通过了“陈省身数学奖奖励条例”，通过了“陈省身数学奖”评选委员会名单，主任：吴文俊，委员：吴文俊、王元、谷超豪、程民德、胡国定、冯康、段学复. 该奖以奖励在国内从事数学研究或教学作出突出贡献的中青年数学工作者.

4月　Acta Mathematica Sinica (New Series) 即《数学学报》(新辑) 外文版创刊.

4月　首次全国初中数学联合竞赛举行.

4月19日　在北京科学会堂举行《华罗庚科普著作选集》赠书仪式，上海市出版局与上海教育出版社向华罗庚赠送样书，中国科协副主席裴丽生、中国数学会理事长吴文俊等讲话，副理事长王元介绍华罗庚的研究成就.

4月23—28日　在河南洛阳市召开全国中学数学普及刊物工作会议，会议由本会普及工作委员会与教育工作委员会共同主

持，26个刊物的37名代表和4家出版社的代表出席会议．会议就如何提高数学普及刊物的质量等问题进行了热烈的讨论．

5月　组合数学与图论专业委员会成立．

6月6日　第四届常务理事会第五次会议在中科院数学所召开，吴文俊理事长主持会议，这次会议主要讨论了50周年年会的筹备工作等．

6月12日　名誉理事长华罗庚应日本数学会的邀请在日本东京大学作学术报告时，心脏病突发，不幸逝世．

7月12日　"华罗庚同志纪念会"在北京科学会堂隆重举行，首都四百多名数学工作者及各界人士缅怀华罗庚教授的光辉业绩．理事长吴文俊主持大会，副理事长王元在会上介绍华罗庚对数学发展作出的巨大贡献，中国科学院副院长严东生、数理学部副主任马大猷等在会上讲话，上海市数学会理事长、复旦大学副校长谷超豪代表苏步青教授，代表上海市数学会和复旦大学在会上发言，表示对华罗庚的深切怀念．纪念大会以后，举行了华罗庚学术成就报告会，王元、万哲先、龚升等分别报告了华罗庚在数论、代数与几何、函数论和应用数学等方面的贡献．

7月　第26届国际数学奥林匹克在芬兰赫尔辛基举行，我国首次派代表队参加，2名参赛学生1人获得铜奖．

8月　《应用概率统计》(季刊)创刊，由中国数学会概率统计学会主办．

8月17日　第四届常务理事会第六次会议在中科院数学所召开，吴文俊理事长主持会议，会议讨论了50周年年会的筹备工作．

10月26日　四届七次常务理事会会议在中科院数学所召开，吴文俊理事长主持会议，会议讨论了50周年年会的程序及大会报告安排等．

12月5日晚上　在上海蓝天宾馆召开了四届八次常务理事会会议，理事长吴安俊主持会议，全体常务理事出席，名誉理事

长苏步青、柯召、吴大任和名誉理事吴新谋也出席了会议．这次会议讨论通过了“中国数学会 50 周年年会”的议程，通过了苏步青将在纪念大会上作的报告．

12 月 6—10 日　中国数学会 50 周年年会在上海隆重举行，来自各省市自治区数学会和有关单位的 200 多名代表，以及代表 10 个国家和地区数学会的 15 名数学家应邀参加了这次年会．12 月 6 日在复旦大学召开大会，隆重庆祝中国数学会成立 50 周年．理事长吴文俊主持大会并致开幕词，名誉理事长苏步青作了题为“五十年间的回顾与今后的展望”的报告，回顾了中国数学会成立半个世纪以来艰难而光辉的历程．会上，全国政协副主席、中国科协主席周培源代表中国科协致词，热烈祝贺中国数学会成立 50 周年．中国科学院副院长周光召在会上代表中国科学院，上海市科协主席、复旦大学校长谢希德代表上海市科协和复旦大学分别致词，热烈祝贺中国数学会成立 50 周年．他们的讲话中都谈到了数学作为一门基础学科的重要性．在大会上，副理事长程民德宣读了中国数学会表彰我国从事数学工作五十年以上的 83 位数学家的决定，向这些对中国数学的发展和中国数学会的创建与发展作出了贡献的老一辈数学家颁发荣誉证书．副理事长胡国定宣读了中国数学会表扬学会工作积极分子，并向他们颁发荣誉证书的决定，表杨了 24 位从事数学会工作多年并作出成绩的专、兼职学会干部．

12 月 7 日　上海市市长江泽民在上海国际饭店会见来华出席中国数学会 50 周年年会的 15 位外国数学家和部分中国数学家，周培源、周光召、吴文俊等参加了会见．

中国数学会 50 周年年会进行了广泛的学术交流活动，陈省身在大会上作了“国际数学五十年”的报告，吴文俊等 11 位中国数学家与 H. Cartan 等 4 位外国数学家在大会上作了学术报告，130 多篇学术论文在分组会上作了报告．

12 月 11 日　中国数学会第四届理事会第二次会议在复旦大

学召开，60名理事出席，名誉理事长苏步青出席会议. 会议由吴文俊主持，宣读了国际数学联盟（IMU）秘书长O. Lehoto祝贺中国数学会成立50周年的电报，通报了一些国家数学会提出与我会加强联系与交流的情况. 这次会议讨论了近两年本会工作计划，并决定1987年不再召开全国代表大会，而用通讯选举的方式产生下届理事会.

本年　中国数学会支持召开的学术会议有15个，1800多人参加会议，交流的学术论文有1500多篇.

1986年

1月　全国首届中学生数学冬令营在天津南开大学举办，来自全国各省市自治区的79名中学生和30多名教师参加了这次冬令营活动，通过考试选拔出21名中学生组成全国数学奥林匹克培训班. 通过集训，最后选拔6名中学生组成国家代表队，参加当年的国际数学奥林匹克.

1月　《生物数学学报》创刊，由本会生物数学专业委员会等主办.

1月18日　第四届常务理事会第九次会议在中科院数学所召开，吴文俊理事长主持会议，这次会议主要讨论了本会的国际交流工作等问题.

4月4日　第四届常务理事会第十次（扩大）会议在中科院数学所召开，吴文俊理事长主持会议. 这次会议主要讨论了国际交流工作和理事会改选等问题.

4月16—20日　第四次普及工作会议在西安召开，会议主要讨论了数学竞赛工作，再次明确要贯彻“在普及的基础上不断提高”的方针.

7月　第27届国际数学奥林匹克（IMO）在波兰华沙举行，我

国参赛的 6 名中学生，3 人获得金牌奖，1 人获银牌奖，1 人获铜牌奖．并获团体总分第 4 名．

7 月 31 日—8 月 1 日　国际数学联盟（IMU）在美国加州奥克兰举行第十届会员代表大会，理事长吴文俊与秘书长杨乐应IMU 执行委员会的邀请，代表中国数学会以观察员身份参加了大会．这届大会讨论通过了中国数学会（Chinese Mathematical Society）与位于中国台北的数学会（The Mathematical Society Located in Taipei，China）作为一个整体——中国（China）加入 IMU．

8 月 3—11 日　1986 年国际数学家大会在美国加利福尼亚大学伯克莱分校举行，我国 25 位数学家参加这次大会，吴文俊应邀在分组会上作了关于中国古代数学史研究的 45 分钟学术报告．

8 月 29 日　在中国科学院数学所举行茶话会，庆祝《数学学报》创刊 50 周年．理事长吴文俊、名誉理事长江泽涵等先后在会上讲话，并宣读了名誉理事长苏步青、江泽涵、柯召、吴大任等为庆祝《数学学报》创刊 50 周年而写的题词．

10 月 13 日　第四届常务理事会第十一次会议在北京科学会堂召开，吴文俊理事长主持会议．这次会议的主要议题是理事会的改选问题，对理事候选人的条件，重申连任不能超过一届，新推选的候选人的年龄一般不能超过 60 岁．决定用通讯选举方式选举产生新的理事会．

11 月　首届“华罗庚全杯少年数学邀请赛”由中国科协、中央电视台和《中国少年报》等联合举办，本会承担了竞赛命题及决赛评奖等工作．

本年　中国数学会支持召开的学术会议有 15 个，1694 人参加会议，交流的学术论文有 1357 篇．

1987 年

1 月　评出 1985 年和 1986 年度的首届“陈省身数学奖”得奖人——中国科学院数学所研究员钟家庆、北京大学数学系教授张恭庆.

4 月 10 日　第四届常务理事会第十二次会议在中科院数学所举行，吴文俊理事长主持会议. 这次会议主要讨论了理事会的改选工作，决定待理事会经通讯选举产生后，仍用通讯选举的方式产生常务理事会.

5 月 6 日　“陈省身数学奖”首届颁奖仪式在天津南开大学隆重举行，理事长吴文俊主持颁奖仪式，出席的有陈省身及夫人郑士宁，全国政协副主席、中国科协名誉主席周培源，中国科学院院长周光召，以及为陈省身数学奖提供捐助的香港亿利达工业发展集团有限公司总裁刘永龄先生等.

7 月　第 28 届国际数学奥林匹克 (IMO) 在古巴哈瓦那举行，我国参赛的 6 名中学生获得金、银、铜牌各 2 枚. 国际数学奥林匹克常设委员会决定，第 31 届 IMO 于 1990 年在中国北京举行.

9 月 1 日　纪念牛顿的巨著《自然哲学的数学原理》出版 300 周年大会在北京科学会堂举行，周培源、严济慈、钱学森等在会上讲话，会后举行了学术讨论会. 这些活动是本会与中国科技史学会、中国物理学会等联合举办的.

10 月　79 名理事组成的中国数学会第五届理事会，经通讯选举产生.

10 月 27—29 日　应本会邀请，国际数学联盟 (IMU) 主席、苏联著名数学物理学家法捷耶夫 (L. Faddeev) 访问北京并作学术报告.

12 月　通讯选举产生了 19 名常务理事候选人.

本年　中国数学会支持召开的学术会议有13个，参加会议的有1553人，交流的学术论文有1224篇.

1988年

1月9日　第四届常务理事会第十三次会议在中科院数学所举行，吴文俊理事长主持会议，讨论决定由新的常务理事会主持选举正副理事长和秘书长.

2月　通讯选举产生了19名常务理事组成的第五届常务理事会.

2月14日　在北京科学会堂举行春节座谈会，第四、五届（在京）理事出席，吴文俊、王元主持会议.

2月27日　第五届常务理事会第一次会议在中国科学院数学所召开，召集人王元主持会议. 这次会议讨论提出了理事长、秘书长候选人名单，并决定不提副理事长候选人名单，由全体理事直接从常务理事中选举，得票数最多的前四名当选为副理事长.

3月7日　首届高中理科试验班开学典礼在北京大学举行，唐敖庆、王明达、王元、丁石孙等讲话. 数理化三个试验班分别设在清华大学附中、北京大学附中和北京师范大学实验中学.

4月　通讯选举产生了第五届理事会的领导机构，理事长：王元，副理事长：丁石孙、严士健、伍卓群、石钟慈，秘书长、李忠.

4月8日　第五届常务理事会第二次会议在中科院数学所召开，理事长王元主持会议. 这次会议讨论决定，聘任方开泰、任南衡为副秘书长，聘任了各工作委员会负责人：学术交流工作委员会为萧树铁，编辑出版工作委员会为吴方，国际交流工作委员会为石钟慈，普及工作委员会为裘宗沪，教育工作委员会为严士健，数学名词审定委员会为田方增，组织工作委员会为成平，学

会办公室为任南衡.

8月1—7日 “纪念华罗庚国际数论与分析会议”在北京召开，30多位来自10多个国家和地区的数学家，与100多位国内数学家参加了这次学术会议.

8月20—24日 国家自然科学基金委员会举办的“21世纪中国数学展望学术讨论会”在天津南开数学所举行，这次会议提出了“中国数学要在21世纪率先赶上世界先进水平”的宏伟目标.

9月17日 第五届常务理事会第三次会议在北京大学召开，理事长王元主持会议，讨论了近两年本会的几项重大活动等.

11月9—11日 第五次普及工作会议在江西九江市召开，会议交流了各地兴办数学奥林匹克学校的经验，讨论通过了“中国数学奥林匹克等级教练员暂行条例”.

11月 《中国大百科全书·数学》卷出版.

本年 中国数学会支持召开的学术会议有13个，1307人参加会议，交流的学术论文有1134篇.

1989年

1月 国家自然科学基金委员会设立数学天元项目基金.

1月 第二届陈省身数学奖评奖揭晓，1987年和1988年度的获奖人为中国科学院系统科学研究所研究员李邦河、北京大学数学系教授姜伯驹.

3月14—15日 数学会组织工作座谈会在中国科学院数学所召开，李忠秘书长主持会议，参加会议的有北京、上海、湖北、四川、陕西、吉林等省、直辖市数学会和学科分会的代表，会议讨论了数学会的组织建设工作等问题.

4月5日 第五届常务理事会第四次会议在北京大学召开，王元理事长主持会议. 这次会议讨论通过了第五届理事会第一次

会议议程等.

4月6—8日 第五届理事会第一次会议在北京大学召开，55名理事参加会议，名誉理事长江泽涵、柯召，上届理事长吴文俊，上届副理事长程民德、胡国定等到会讲话. 王元理事长代表常务理事会作工作报告，传达了中国科协主席钱学森对数学教育改革及数学发展的关心和支持，李忠秘书长作了“关于缴纳会费及修改会章的几点说明”的报告. 会议讨论修改通过了新的会章. 会议还进行了学术交流活动，13位中青年数学家应邀在会上作了学术报告.

4月7日 第五届常务理事会第五次会议在北京大学召开，王元理事长主持会议，讨论通过了第五届理事会第一次会议纪要.

7月15日 第五届常务理事会第六次会议在中国科学院数学所召开，王元理事长主持会议，讨论决定支持与指导科学出版社翻译出版苏联《数学百科全书》，并决定向本会会员颁发新制作的中国数学会会员证.

7月 普及工作委员会在山东济南市召开数学竞赛命题研讨会.

8月18日 在北京科学会堂举行数学教育与科研座谈会，王元理事长主持会议，60多名数学工作者出席，中国科协主席钱学森在会上作了“发展我国的数学科学”的长篇讲话，论述了数学科学的重要性、电子计算机对数学科学发展的影响，谈到理工科大学的数学教育改革等问题. 吴文俊、丁石孙、萧树铁、严士健等也在会上发言.

10月9日 “陈省身数学奖”第二次颁奖仪式暨《陈省身文选》首发仪式在北京科学会堂举行，理事长王元主持仪式，出席的有陈省身及夫人郑士宁、刘永龄先生，以及数学家江泽涵、吴文俊、程民德等，还有中国科学院特邀顾问严东生.

10月14日 第五届常务理事会第七次会议在中国科学院数学所召开，王元理事长主持会议，讨论了国内外学术交流工作，决

定成立中国数学会数学传播工作委员会，主任为史树中.

11月16—18日　首次数学传播工作会议在天津南开数学研究所举行，史树中主持会议，丁石孙、胡国定出席会议并讲话，30多名代表认真讨论了数学传播工作.

本年　中国数学会支持召开的学术会议有12个，1046人参加会议，交流的学术论文有735篇.

1990年

1月12日　第31届国际数学奥林匹克(IMO)组织委员会在中南海举行第一次会议，国家教委主任李铁映任组委会主任，王元、柳斌等任副主任，王寿仁任秘书长.

3月31日　第五届常务理事会第八次会议在中国科学院数学所召开，副理事长严士健主持会议，会议听取了有关第31届IMO筹备情况的汇报，讨论了国际学术交流等工作.

5月26—27日　计算机发展对理工科大学数学教学的影响学术讨论会在北京大学召开.

6月4—5日　本会教育工作委员会主持的上海地区数学教学改革座谈会在复旦大学召开.

7月　由我国举办的第31届国际数学奥林匹克（IMO）在北京举行，54个国家和地区的代表队，308名中学生，162名正副领队与观察员参加. 我国代表队获得5枚金牌、1枚银牌，团体总分第一.

8月14—18日　第一届亚洲数学大会在香港举行，中国数学会参与了大会的筹备工作. 我国（大陆）58位数学家参加了这次大会，吴文俊应邀在全体大会上作了一小时的学术报告.

8月18—19日　国际数学联盟(IMU)第11次会员代表大会在日本神户召开，丁石孙、石钟慈、胡和生代表中国数学会，与

2 名位于中国台北数学会的代表出席了会议．吴文俊被选为下届 IMU 发展与交流委员会委员．

8 月 21—29 日　1990 年国际数学家大会在日本京都召开，我国 65 名数学家参加了这次大会，我国青年数学家田刚和林芳华应邀在分组会上作了 45 分钟的学术报告，44 名中国数学家在小组会上作了 10 分钟的学术报告．

10 月 13 日　第五届常务理事会第九次会议在中国科学院数学所召开，王元理事长主持会议，这次会议主要讨论了理事会的换届问题，决定次年不召开全国代表大会，仍采用通讯方式改选理事会．

11 月 1—3 日　中国工业与应用数学学会第一次大会在北京清华大学召开，宣布中国工业与应用数学学会（CSIAM）正式成立，萧树铁被选为首任理事长．

11 月 6—9 日　第六次普及工作会议在湖南宁乡县召开，会议讨论总结了 10 年来的数学普及工作．

11 月 10 日　第五届常务理事会第十次会议在北京大学数学系召开，王元理事长主持会议，会议主要讨论了理事会的改选等问题．

本年　中国数学会支持召开的学术会议有 16 个，1700 人参加会议，交流的学术论文有 1430 篇．

1991 年

1 月　第 3 届陈省身数学奖评奖结果公布，1989 年和 1990 年度的获奖人为华东师范大学数学系教授肖刚、中国科学技术大学数学系教授冯克勤．

2 月 9 日　第五届常务理事会第十一次会议在北京大学数学系召开，王元理事长主持会议，会议主要讨论了有关召开五届二

次及六届一次理事会会议的筹备工作.

4月　经中国科协和民政部批准，本会下属的运筹学分会升格为中国运筹学会.

5月16—21日　第二次21世纪中国数学展望学术会议在天津南开数学所举行，这次会议由国家自然科学基金委员会举办.

5月18日　第五届常务理事会第十二次会议在天津南开大学召开，副理事长丁石孙主持会议，这次会议审核了各省、市、自治区数学会和有关单位推荐的第六届中国数学会理事名单，确认78人为中国数学会第六届理事. 会议还讨论了将召开的理事会会议的议程等.

5月19日　第三届陈省身数学奖颁奖仪式在天津南开大学隆重举行，副理事长丁石孙主持仪式，出席仪式的有陈省身及夫人郑士宁，中国科学院院长周光召等. 颁奖后，吴文俊作了题为“陈省身教授的学术成就”的学术报告.

7月22日　本会完成在民政部社会团体依法登记手续，领到民政部颁发的“中华人民共和国社会团体登记证”(社证字第0075号)，并在8月29日《人民日报》第五版予以公告.

8月3日　五届十三次常务理事会议在中科院数学所召开，王元理事长主持会议，这次会议讨论了常务理事会的工作报告和会章修改草案等.

8月19日　五届十四次常务理事会议在北京军区后勤部招待所召开，王元理事长主持会议，讨论通过了常务理事会的工作报告和理事会会议的议程等.

8月20日　五届十五次常务理事会议在北京召开，王元理事长主持会议，讨论了常务理事会的选举等问题.

8月20—23日　第五届理事会第二次会议及第六届理事会第一次会议在北京召开，这是一次两届理事会的交接会议，新老两届理事参加会议. 王元理事长代表常务理事会在会上作了工作报告，任南衡副秘书长作了“关于修改《中国数学会章程》的几

点说明”的书面发言．会议讨论通过了工作报告和修改后的新的会章．会议期间还进行了学术交流，邀请了 7 名数学家作学术报告．

会议选举产生了 19 名常务理事组成的第六届常务理事会，选举产生了第六届正副理事长和秘书长，理事长：杨乐，副理事长：石钟慈、严士健、张恭庆、胡和生、潘承洞，秘书长：李忠．

8 月 21 日　第六届常务理事会第一次会议在北京军区后勤部招待所召开，杨乐理事长主持会议，主要商讨了各工作机构的改组等问题，决定继续聘任任南衡为（专职）副秘书长，确定了各工作委员会的负责人：学术交流工作委员会为张恭庆，编辑出版工作委员会为沈信耀，国际交流工作委员会为石钟慈，普及工作委员会为裘宗沪，传播工作委员会为史树中，教育工作委员会为严士健，数学名词审定委员会为田方增，咨询服务部为谢衷洁，学会办公室为任南衡．

12 月 14 日　第六届常务理事会第二次会议在中国科学院数学所召开，杨乐理事长主持会议，讨论决定设立“中国数学会奥林匹克委员会”，作为本会的一个工作机构，负责做好每年我国参加国际数学奥林匹克活动的有关工作，对国外可以使用“中国数学奥林匹克委员会”的名称，常务理事会聘任王寿仁为该委员会主席，王元为副主席．这次会议讨论修改了“陈省身数学奖奖励条例”，通过了陈省身数学奖第二届评选委员会名单，主任：杨乐，委员：丁石孙、石钟慈、史树中、伍卓群、张恭庆、李邦河、胡和生、潘承洞．会议讨论决定设立“华罗庚数学奖”，通过了“华罗庚数学奖奖励条例”及首届评奖委员会名单，主任：杨乐，委员：丁石孙、石钟慈、史树中、伍卓群、张恭庆、李邦河、胡和生、潘承洞．“华罗庚数学奖”主要奖励我国数学家长期以来对数学发展所作的贡献．

本年　中国数学会支持召开的学术会议有 12 个，1370 人参加会议，交流的学术论文有 1110 篇．

1992年

3月12—18日　第七次普及工作会议在四川重庆市西南师范大学召开，会议讨论通过了本会普及工作委员会制定的数学竞赛大纲.

3月19—23日　本会教育工作委员会在广州举行会议，就我国当前的数学教育改革进行了交流，并赴深圳、珠海、中山等地进行了考察，对经济发达地区的数学教育现状和未来的发展趋势作了认真的讨论，并对我国当前中小学数学教育改革提出了一些有益的建议.

10月23日　编辑出版工作座谈会在北京中国科学院数学所举行，出席会议的有《数学学报》、《应用数学学报》、《数学进展》、《数学的实践与认识》和《数学通报》等刊物的编委会和编辑部的同志，编辑出版工作委员会负责人沈信耀主持会议. 会上交流了各刊的情况及其办刊经验，并对办刊方针以及如何进一步提高刊物的质量等问题进行了认真的讨论.

10月　首届“华罗庚数学奖”评出结果，获奖人为中国科学院院士、数学研究所研究员陈景润和陆启铿. 陈景润因在解析数论中哥德巴赫猜想等方面的研究作出的杰出贡献而获奖，陆启铿因在多元复变函数论等方面的研究作出的杰出贡献而获奖.

11月4日　首届华罗庚数学奖颁奖仪式在北京科学会堂隆重举行，国务委员、国家科委主任宋健出席颁奖仪式并讲话. 出席颁奖仪式的有全国政协副主席卢嘉锡，中国科协副主席、党组书记高潮，中国科协副主席高镇宁等领导同志，华罗庚夫人吴筱元以及首都数学界的近百名代表. 颁奖仪式由副理事长石钟慈主持，理事长杨乐和湖南教育出版社社长任立在会上讲话. 中国科学院院士、数学所研究员王元在会上介绍陈景润的工作，中国科

学技术大学数学系教授殷慰萍介绍陆启铿的工作，获奖人陆启铿在会上讲话.

11月12—14日　第二次数学传播工作会议在武汉市华中师范大学举行，出席会议的有来自全国各方面的30多名代表. 传播工作委员会主任史树中主持会议，并代表中国数学会传播工作委员会和数学天元基金传播工作组作了工作报告. 代表们在会上交流了三年来开展数学传播工作的情况与经验，讨论制定了今后的工作计划.

12月5日　第六届常务理事会第三次会议在中国科学院数学所举行，杨乐理事长主持会议. 这次会议总结了本会1992年的工作，讨论了本会工作的改革等问题，并对本会60周年纪念活动提出了初步设想，建议于1995年召开一次全国会员代表大会进行理事会改选，并庆祝中国数学会成立60周年.

本年　中国数学会支持召开的学术会议有14个，1430人参加会议，交流的学术论文有1250篇.

1993年

1月　第四届陈省身数学奖评奖揭晓，1991年和1992年度的获奖人为中国科学院数学研究所丁伟岳研究员和复旦大学数学研究所忻元龙教授.

5月14日　第四届陈省身数学奖颁奖仪式在天津南开大学举行，陈省身教授及夫人郑士宁出席仪式并向获奖人颁奖. 副理事长张恭庆主持颁奖仪式，出席的有吴文俊等一百多位数学界人士.

7月13日　第六届常务理事会第四次会议在中国科学院数学所召开，杨乐理事长主持会议. 这次会议主要讨论了向国际数学联盟（IMU）申请2002年国际数学家大会在我国举办的问题，以及有关参加1994年国际数学家大会有关事宜.

7月23日　第六届常务理事会第五次（扩大）会议在中国科学院数学所召开，杨乐理事长主持会议．这次会议主要讨论向IMU推荐在1994年国际数学家大会上作45分钟邀请报告的我国数学家名单．

11月3—6日　本会主办的学会改革工作座谈会在南宁市广西大学召开，近20个省、直辖市、自治区数学会与学科分会的23位秘书长和副秘书长参加这次会议，秘书长李忠与副秘书长任南衡主持会议．与会代表在会上介绍了数学会在新的形势下如何解放思想，加快改革步伐，积极开展学会工作的情况与经验，共同探讨了如何进一步深化改革，开创数学会工作的新局面．

12月16日　第六届常务理事会第六次会议在中国科学院数学所召开，杨乐理事长主持会议．这次会议的主题是商定推荐由国际数学联盟资助参加94年国际数学家大会的青年数学家名单，并讨论了1994年本会的工作．

本年　中国数学会支持召开的学术会议有13个，1098人参加会议，交流的学术论文有937篇．

1994年

1月29日　首都数学界1994年迎春座谈会在中国科学院数学所举行，参加座谈会的有中国数学会本届在京理事及往届常务理事、中国科学院院士、北京数学会负责人、首都各数学研究机构及大学院校数学系负责人以及有关出版社的同志共50多人．杨乐理事长主持会议并向与会者汇报了本会近年来的工作，会上大家对1995年中国数学会成立60周年纪念活动，以及申请在我国召开2002年国际数学家大会的问题，进行了热烈的座谈讨论，发表了很多有益的意见和建议．

3月20—25日　第八次普及工作会议暨数学奥林匹克研讨

会在福州召开，这次会议重点讨论了全国初中数学联赛的问题，也讨论了小学、高中数学竞赛问题，以及等级教练员评审、中学生数学冬令营营员的选拔等问题.

3月22日　第六届常务理事会第七次会议在中国科学院数学所召开，杨乐理事长主持会议，这次会议的主题是讨论中国数学会成立60周年纪念活动的计划. 会议讨论同意王元、方开泰给常务理事会的申请报告，通过决定成立均匀设计分会.

3月29日　名誉理事长江泽涵逝世.

4月　《数学名词》出版，这是数学名词审定委员会经过七年的工作，并上报全国自然科学名词审定委员会批准并公布的，共8862条数学名词.

4月　经中国科协与民政部批准，中国数学会均匀设计分会成立，分会的顾问为梁守槃、庄逢甘、王元，理事长为方开泰，副理事长为殷鹤龄、安鸿志，秘书长为张建舟. 分会办公室设在北京航天工业总公司第三设计院.

7月31日—8月1日　国际数学联盟(IMU)第12次代表大会在瑞士Luzern举行，中国数学会的代表杨乐、张恭庆、冯克勤，与位于中国台北数学会的代表王怀权、黄启瑞组成的中国代表团出席了这次会议. 张恭庆被选为下届IMU发展与交流委员会委员.

8月3—11日　1994年国际数学家大会在瑞士苏黎世举行，我国68位数学家参加了这次大会，我国数学家张恭庆、马志明与旅美数学家厉建书、李俊应邀在分组会上作了45分钟的学术报告.

10月8日　第六届常务理事会第八次会议在中国科学院数学所召开，杨乐理事长主持会议，这次会议重点讨论了1995年中国数学会成立60周年纪念活动的问题，决定于1995年5月在北京召开"中国数学会第七次代表大会暨60周年年会"，进行学术交流活动，庆祝中国数学会成立60周年，改选理事会，修改会章等.

本年　中国数学会支持召开的学术会议有15个，1332人参加会议，交流的学术论文有1090篇.

附录一

中国数学会历届理事会名单

（一）中国数学会（前期）历届董事会、理事会和评议会（1935.7—1948.10）

1. 中国数学会（前期）董事会（1935. 7—1948. 10）

主席：胡敦复.

董事（共9人）： 王仁辅 冯祖荀 何 鲁 郑之蕃 周美权 胡敦复 秦 汾 顾 澄 黄际遇.

2. 中国数学会（前期）第一届理事会（1935. 7—1936. 8）

常务理事：朱言钧 范会国.

理事（共11人）： 江泽涵 朱言钧 孙光远 苏步青 何衍璇 陈建功 范会国 段子燮 曾昭安 熊庆来 魏嗣銮.

秘书：张镇谦.

会计：汤彦颐.

3. 中国数学会（前期）第二届理事会（1936. 8—1941. 3）

常务理事：朱言钧 范会国.

理事（共11人）： 江泽涵 汤璪真 朱言钧 孙光远 苏步青 杨武之 陈建功 范会国 赵进义 曾昭安 熊庆来.

秘书：张镇谦.

会计：汤彦颐.

4. 中国数学会(前期)第三届理事会(1941.3—1948.10)

常务理事 朱言钧 范会国.

理事（共11人）： 江泽涵 汤璪真 朱言钧 孙光远 苏步青 杨武之 陈建功 范会国 赵进义 曾昭安 熊庆来.

秘书：周炜良.

会计：汤彦颐.

5. 中国数学会（前期）第一届评议会（1935. 7—1936. 8）

评议（共21人）：　汤璪真　刘正经　刘俊贤　束星北
陆慎仪　陈怀书　陈作钧　陈荩民　郑尧拌　单粹民　武崇林
胡坤升　胡浚济　高扬芝　郭坚白　钱宝琮　徐　治　曾远荣
蒋绍基　傅种孙　褚一飞.

6. 中国数学会（前期）第二届评议会（1936. 8～1941. 3）

评议（共21人）：　刘正经　刘亦珩　刘俊贤　束星北
陆慎仪　陈怀书　陈作钧　陈荩民　武崇林　胡坤升　胡浚济
段子燮　高扬芝　郭坚白　钱宝琮　徐　治　曾远荣　蒋绍基
傅种孙　程毓淮　褚一飞.

7. 中国数学会（前期）第三届评议会（1941. 3—1948. 10）

评议（共21人）：　石法仁　刘正经　刘俊贤　陆慎仪
陈怀书　陈作钧　陈荩民　郑尧拌　单粹民　武崇林　胡坤升
胡浚济　段子燮　高扬芝　郭坚白　钱宝琮　徐　治　曾远荣
蒋绍基　傅种孙　褚一飞.

（二）新中国数学会理事会（1940. 9—1948. 10）

会长：第一任　姜立夫（1940. 9—约1943年）
　　　　第二任　熊庆来（约1943年—1948. 10）

理事（共9人）：　江泽涵　华罗庚　孙光远　苏步青
杨武之　陈建功　陈省身　姜立夫　熊庆来.

文书：陈省身.

会计：华罗庚.

（三）中国数学会历届理事会（1951. 8—1995. 12）

1. 中国数学会第一届理事会（1951. 8—1960. 2）

主席（理事长）：华罗庚.

副主席（副理事长）：江泽涵　陈建功.

常务理事（共9人）：王寿仁　江泽涵　关肇直　华罗庚

吴大任　陈建功　段学复　曾昭安　傅种孙.

理事（共21人）： 王寿仁　江泽涵　关肇直　刘正经　刘俊贤　华罗庚　苏步青　李　俨　李先正　吴大任　何　鲁　张德馨　陈建功　姜立夫　段子美　段学复　萧文灿　曾昭安　程廷熙　程其襄　傅种孙.

候补理事（共7人）： 朱凤豪　李锐夫　杨春田　张　鸿　赵进义　徐献瑜　韩桂丛.

2. 中国数学会第二届理事会（1960. 2—1966. 7）

理事长： 华罗庚.

副理事长： 江泽涵　苏步青　陈建功.

秘书长： 关肇直.

副秘书长： 王寿仁.

常务理事（共12人）： 王寿仁　江泽涵　关肇直　安其春　华罗庚　苏步青　吴大任　吴新谋　陈建功　范凤岐　段学复　程民德.

理事（共37人）： 丁尔升　卫念祖　王寿仁　王湘浩　卢庆骏　叶南勋　江泽涵　关肇直　刘世泽　刘俊贤　安其春　华罗庚　苏步青　李　俨　李万义　李先正　李国平　李修睦　吴大任　吴新谋　何　鲁　张　鸿　陆润林　陈传璋　陈建功　单粹民　范凤岐　林鸿庆　林碧英　周雪鸥　金昌述　姜立夫　柯　召　段学复　曾鼎禾　程民德　熊庆来.

3. 中国数学会第三届理事会（1978. 11—1983. 12）

理事长： 华罗庚.

副理事长（共6人）： 江泽涵　齐民友　苏步青　吴大任　吴文俊　柯　召.

秘书长： 孙克定.

副秘书长： 王寿仁　林建祥.

常务理事（共19人）： 王寿仁　江泽涵　关肇直　齐民友　安其春　华罗庚　孙克定　苏步青　杨　乐　吴大任　吴文俊

吴新谋　林建祥　胡凡夫　柯　召　段学复　夏道行　程民德　潘　纯.

理事（共102人）：丁尔升　于宗英　卫念祖　王寿仁　王杰官　王梓坤　王湘浩　冯　康　卢庆骏　龙季和　田方增　叶彦谦　叶南薰　代遴山　白正国　江泽坚　江泽涵　关肇直　齐民友　刘长凯　刘世泽　刘韵清　安其春　许淞庆　朱大绥　朱德祥　伉铁健　华罗庚　孙本旺　孙克定　孙泽瀛　孙树本　纪延瑞　汪　浩　谷超豪　严志达　严敦杰　苏步青　李孝传　李国平　李修睦　杨　乐　杨从仁　吴大任　吴文俊　吴从炘　吴英辅　吴洪鳌　吴祖基　吴新谋　何旭初　余元希　张禾瑞　张克明　张学铭　张素诚　张恭庆　张德馨　陆润林　陈　杰　陈庆益　陈传璋　陈隆钧　陈景润　陈德璜　郑曾同　单粹民　林建祥　林鸿庆　林碧英　周怀衡　周毓麟　金昌述　姜伯驹　赵访熊　赵宪初　赵得春　胡凡夫　胡世华　胡国定　柯　召　段学复　侯振挺　凌　岭　郭本瑜　秦元勋　桂湘云　夏道行　徐桂芳　梁宗巨　梅向明　曹锡华　龚　昇　曾如阜　曾肯成　谢庭藩　董光昌　程民德　蒲保明　蔡仲武　潘　纯　潘承洞.

4. 中国数学会第四届理事会（1984. 1—1987. 12）

名誉理事长（共5人）：华罗庚　江泽涵　苏步青　吴大任　柯　召.

名誉理事（共3人）：李国平　吴新谋　赵访熊.

理事长：吴文俊.

副理事长（共4人）：王　元　谷超豪　胡国定　程民德.

秘书长：杨　乐.

副秘书长：林建祥　任南衡（专职）.

常务理事（共19人）：丁尔升　王　元　王光寅　王寿仁　冯　康　叶彦谦　齐民友　成　平　伍卓群　谷超豪　杨　乐　肖树铁　吴文俊　林建祥　胡国定　段学复　桂湘云　夏道行　程民德.

理事（共 97 人）： 丁石孙　丁尔升　丁夏畦　于鸣歧
万哲先　王　元　王光寅　王寿仁　王学仁　王杰官　王梓坤
王湘浩　冯　康　卢庆骏　田方增　叶彦谦　白正国　江泽坚
齐民友　刘应明　成　平　朱德祥　任南衡　伍卓群　孙树本
谷超豪　严志达　严敦杰　李　祥　李大潜　李世余　李世雄
李佛奇　杨　乐　杨从仁　杨东屏　肖树铁　吴文俊　吴从炘
吴英辅　吴洪鳌　吴祖基　何旭初　张学铭　张鸣镛　张素诚
张恭庆　陆润林　陈　杰　陈文蝂　陈仲沪　陈希孺　陈重穆
陈景润　陈德璜　陈翰馥　郑　权　郑维行　欧阳东方　林　伟
林建祥　林碧英　周巢尘　周毓麟　洪加威　姜伯驹　赵得春
胡世华　胡启迪　胡国定　段学复　侯国荣　侯振挺　凌　岭
郭本瑜　秦元勋　桂湘云　夏道行　徐桂芳　梁宗巨　黄启昌
梅向明　曹锡华　龚　昇　屠规彰　曾　容　曾如阜　谢庭藩
董光昌　程民德　蒲保明　路见可　管梅谷　潘承洞　潘德惠
薛福田　戴执中.

5. 中国数学会第五届理事会（1988. 1—1991. 12）

理事长： 王　元.

副理事长（共 4 人）： 丁石孙　石钟慈　伍卓群　严士健.

秘书长： 李　忠.

副秘书长： 方开泰　任南衡（专职）.

常务理事（共 19 人）： 丁石孙　万哲先　王　元　方开泰
石钟慈　史树中　刘应明　成　平　伍卓群　任南衡　沈世镒
严士健　严绍宗　李　忠　肖树铁　吴　方　洪加威　胡和生
路见可.

理事（共 79 人）： 丁石孙　丁同仁　于景元　万哲先
方开泰　方爱农　王　元　王兴华　王光寅　王廷辅　王学仁
王国俊　王斯雷　王朝瑞　韦博成　石钟慈　史树中　齐植兰
刘应明　许以超　成　平　朱嘉城　伍卓群　任南衡　孙继广
沈世镒　严士健　严绍宗　杜石然　李　忠　李　祥　李世余

李世雄　李佛奇　李荣华　李翊神　李静懿　杨子孝　杨东屏
肖树铁　吴　方　吴立德　吴振德　张关泉　张海泉　张福基
陆文端　陈文嵘　陈仲沪　陈宗洵　陈叔瑾　陈重穆　郑　权
郑维行　林　伟　罗定军　周巢尘　洪加威　施光燕　胡大同
胡启迪　胡迪鹤　胡和生　郭大钧　郭柏灵　梁友栋　黄敬之
曹之江　曹策问　游兆永　温立志　曾　容　裘宗沪　路见可
管梅谷　潘德惠　薛福田　戴执中　戴新生.

6. 中国数学会第六届理事会（1992. 1—1995. 12）

理事长：杨　乐.

副理事长（共5人）：石钟慈　严士健　张恭庆　胡和生　潘承洞.

秘书长：李　忠.

副秘书长：任南衡（专职）

常务理事（共19人）：冯克勤　石钟慈　史树中　沈世镒　沈信耀　严士健　严绍宗　李　忠　李荣华　杨　乐　吴　方　张恭庆　张景中　陈天权　陈翰馥　林　群　胡迪鹤　胡和生　潘承洞.

理事（共78人）：　丁同仁　丁传松　于景元　马吉溥
方开泰　方爱农　王兴华　王国俊　王建磐　王斯雷　韦博成
邓永录　冯克勤　石生明　石钟慈　卢才辉　史树中　齐植兰
刘士强　刘隆复　许以超　朱嘉城　任德麟　孙　琦　汪嘉冈
沈世镒　沈信耀　严士健　严绍宗　李　忠　李大元　李长明
李心灿　李荣华　李翊神　杨　乐　杨子孝　杨光俊　杨信安
肖应昆　吴　方　吴从炘　吴振德　吴葵光　张关泉　张恭庆
张景中　张福生　张福基　陈天权　陈传淼　陈任昭　陈宗洵
陈翰馥　郑祖庥　林　群　罗定军　周钦德　施光燕　施武杰
胡大同　胡迪鹤　胡和生　郭大钧　郭本瑜　郭柏灵　格桑尼玛
陶仁骥　曹之江　曹策问　游兆永　温立志　程福长　鲁世杰
裘宗沪　眭跃飞　潘承洞　戴新生.

附录二

中国数学会的几个章程

（一）中国数学会章程

（1935 年 7 月 25 日通过）

第一条　定名　本会定名为中国数学会（西文译名为 The Chinese Mathematical Society).

第二条　宗旨　本会以谋数学之进步及其普及为宗旨.

第三条　会员　本会会员分普通会员、机关会员、名誉会员、赞助会员四种：

(一)普通会员凡具有下列资格之一，由本会会员二人之介绍，经理事会通过者得为本会普通会员.

（甲）研究机关之数学研究员及大学数学教员；

（乙）国内外大学数学系毕业并有相当成绩者；

（丙）与数学相关诸科目之学者，对于数学有特殊兴趣及相当成绩者.

（二）机关会员　凡愿赞助本会事业之机关，由本会会员二人之介绍，经理事会通过者得为机关会员.

（三）名誉会员　国外著名数学家对于本会事业有相当贡献，

由本会会员十人以上之提议，经理事会一致通过者，得被选为本会名誉会员.

（四）赞助会员　凡对于本会热心赞助或捐助巨款，由本会会员十人以上之提议，经理事会通过者得被选为赞助会员.

第四条　董事会　本会设董事会计划发展本会事宜，由大会选举董事九人组织之，任期五年，连选得连任.

第五条　理事会　本会设理事会办理及推动会务，由理事十一人（内常务理事二人）及职员二人（内秘书会计各一人）组织之，理事及职员均由大会选举，任期二年，理事改选一年五人，一年六人，连选得连任，理事会开会时董事得列席表决.

第六条　评议会　本会设评议会评议本会重要事务，由大会选举二十一人组织之，每年改选三分之一. 连选得连任，评议会开会时，董事理事职员均得列席表决.

第七条　委员会　本会于必要时得分别组织各种委员会.

第八条　工作　本会工作暂定为下列各项：

（甲）举行定期常会，宣读论文、讨论关于数学研究及教学种种问题；

（乙）出版数学杂志及其他刊物；

（丙）参加国际间学术工作.

第九条　会费　本会普通会员入会时须缴纳入会费五元. 常年会费五元，如入会时一次缴纳会费五十元，作为永久会员，以后无须再缴会费；机关会员每年须缴纳常年会费五十元.

第十条　会员义务　本会会员有担任会中职务，及其他调查、研究、编译，与缴纳会费、遵守会章等之义务.

第十一条　会员权利　本会会员有提议选举及被选举权与享受本会一切利益.

第十二条　分会　本会得于各地设立分会其章程另订之.

第十三条　年会　本会每年开大会一次，于暑假中举行之，地点及日期由理事会酌定.

第十四条　附则　本会章程得由会员二十人以上之建议提交大会修改之.

（二）中国数学会会章

（1951年8月第一届全国会员代表大会通过）

第一条　定名　本会定名为中国数学会.

第二条　宗旨　本会以团结数学工作者，交流经验，谋数学之普及与提高，为新民主主义经济文化建设而努力为宗旨.

第三条　会员　适合下列（甲）（乙）两条件之一，且经分会审查合格，提请本会常务理事会复核批准，办完入会手续者，得为本会会员.

（甲）专科以上学校以数学为主科或辅科之各学系毕业.

（乙）对数学工作有成绩.

会员有选举权及被选举权，并享受其他各项合法权利；有遵守本会章程，推进会务，执行决议，缴纳会费等义务.

第四条　组织　本会组织采取民主集中制.

（一）本会以会员代表大会为最高权力机构，代表之选举及名额由理事会根据各地会员人数多寡议定之，代表任期二年，连选只得连任一次.

（二）本会设理事会，在会员代表大会闭幕期间，理事会为本会领导机构，理事会设理事二十一人，由会员代表大会选举之，任期二年，连选只得连任一次，但每次连任者不得超过理事总额三分之二.

（三）理事会设常务理事会，为本会执行机构，常务理事会设

常务理事九人，由理事互选之.

（四）理事会及常务理事会，合设主席一人，副主席二人，秘书一人，组织一人，总务一人，会计一人. 由常务理事互推之.

（五）理事会及常务理事会均由主席斟酌情形召集开会.

（六）理事会因工作需要得组织各种委员会.

第五条　年会　本会为研讨学术，交流经验得举行年会，其办法由理事会议定之.

第六条　领导关系　本会受中华全国自然科学专门学会联合会（以下简称科联）领导.

第七条　会费　会员入会费及常年会费均由各分会按本会常务理事会拟定之标准征收之.

第八条　分会通则

（一）经本会常务理事会同意，每一地区或城市，若干城市联合，须组织分会，每一分会会员不得少于三十人，但在一个城市中只得组织一个分会.

（二）分会受本会及当地科联分会领导，并应定期提出工作报告.

（三）分会所收会员缴纳之会费，须以其三分之一交本会.

（四）分会章程由各分会根据本条所列之通则制定之，但须送交本会及当地科联分会备案.

第九条　会址　本会会址设于北京.

第十条　附则

（一）本章程得由会员三十人以上之提议交会员代表大会修改之.

（二）本章程经第一次会员代表大会通过并申请科联备案后施行之，修改时同.

（三）中国数学会章程

（中国数学会第四次全国代表大会
一九八三年十月二十七日通过）

第一章 总 则

第一条 中国数学会是中国共产党领导下的全国数学工作者的学术性群众团体. 是中国科学技术协会的组成部分.

第二条 本会的宗旨是认真贯彻执行科学技术为社会主义建设服务的方针，团结全国数学工作者，为促进数学的发展和繁荣我国的科学事业，提高全民族的科学文化水平，为加速实现我国四个现代化作出贡献.

本会提倡辩证唯物主义，坚持实事求是的科学态度；提倡科学道德，发扬优良学风；认真贯彻“百花齐放，百家争鸣”的方针，充分发扬民主，开展学术上的自由讨论.

第三条 本会的主要工作是：

1. 组织各种形式的学术交流活动；

2. 编辑出版学术刊物；

3. 开展数学普及工作；

4. 开展促进提高数学教学水平的活动；

5. 开展国际学术交流活动，加强同国外的数学团体和数学家的学术交流与合作；

6. 根据国家建设和学科发展的需要，举办各种培训班、讲习班或讨论班等，努力提高会员的学术水平. 并积极发现人才向有关部门推荐；

7. 对国家重要的科学技术政策和有关的重大科学技术项目接受咨询，积极提出合理化建议，经常向有关部门反映数学工作者

的意见和要求；

8. 结合本会的各项活动. 提倡会员自觉学习和运用自然辩证法，加强数学与其它学科的联系.

第二章 会 员

第四条 凡中华人民共和国公民，承认本会会章并具有下列条件之一者，均可申请入会为会员.

1. 具有讲师、助理研究员、工程师以上职称的从事数学或与数学有关工作的科技人员；

2. 取得硕士以上数学学位的科技人员；

3. 高等院校本科毕业，在研究、教学、生产、企事业单位或科研教育组织管理部门从事数学工作三年以上，并具有一定学术水平者；或虽非高等院校本科毕业，但已具有相当于本条规定人员的学术水平者；

4. 热心数学研究或教学事业，并积极支持本会工作的有关部门的领导干部.

第五条 会员入会须由本人自愿申请，由本会会员一人介绍或所在单位推荐，经省、市、自治区数学会或学科分会批准，报本会理事会备案，即为中国数学会会员.

第六条 会员的权利如下：

1. 有选举权和被选举权；

2. 对本会工作有建议、批评权；

3. 优先参加本会组织的各种学术活动；

4. 优先获得与本身业务有关的本会刊物和学术资料.

第七条 会员的义务如下：

1. 遵守本会会章；

2. 执行本会的决议，完成本会委托的工作；

3. 积极参加本会组织的各种活动，推动本会工作（积极撰写论文，参加科普活动等）；

4. 对我国数学的发展和数学教育工作等提出意见和建议；

5. 缴纳会费（缴纳及使用管理办法另订）.

第八条 有较高学术水平的华侨、港澳同胞和对我友好的外国数学家，本人提出申请，由我会会员二人介绍，经常务理事会讨论通过，可授予通信会员称号.

通讯会员的权利与义务有：

1. 可优惠获得我会公开发行的学术刊物；

2. 可申请参加我会举办的学术会议并宣读学术论文；

3. 可在我会主办的学术刊物上发表学术论文；

4. 缴纳会费（办法另定）.

第九条 会员有退会自由. 被剥夺政治权利者，其会籍自然取消.

会员严重违反会章或有明显损害本会声誉的行为，经省市自治区数学会或学科分会理事会讨论通过，并报本会常务理事会批准，可予以除名.

第三章 组织机构

第十条 本会的组织原则是民主集中制.

本会的最高权力机构是全国会员代表大会. 全国会员代表大会的代表由各省、市、自治区数学会推选的代表，以及本届理事和特邀代表组成. 全国会员代表大会应结合学术交流一并举行，一般四年召开一次，必要时由理事会或常务理事会讨论决定，可延期或提前举行.

全国会员代表大会的任务是：

1. 决定本会的工作方针和任务；

2. 审查理事会的工作报告和财务报告；

3. 选举新的理事会；

4. 制订和修改本会章程.

第十一条 在会员代表大会闭会期间，理事会是执行机构，其职责为：

1. 执行全国会员代表大会的决议；

2. 制定本会工作计划；

3. 领导所属工作机构开展活动；

4. 领导并协助各省、市、自治区数学会和本会的学科分会的工作；

5. 召开下届代表大会.

理事会一般两年召开一次.

第十二条 理事会用无记名投票方式选举理事长一人，副理事长及常务理事若干人，秘书长一人及副秘书长若干人组成常务理事会. 常务理事会是理事会的常设机构，在理事会闭会期间行使理事会的职责和日常会务的领导工作.

理事任期四年，连选可连任，但连续任期不得超过两届，隔届可再当选.

第十三条 本会设名誉理事和名誉理事长. 名誉理事候选人由常务理事会提名，经全国代表大会推选产生. 名誉理事应是曾对我国数学的发展或数学教学工作有突出贡献，并对本会工作有重要贡献的老一辈数学家.

第十四条 理事会根据工作需要，设立下列工作机构：

1. 学术交流工作委员会；

2. 编辑出版工作委员会；

3. 国际交流工作委员会；

4. 普及工作委员会；

5. 教育工作委员会；

6. 咨询服务部；

7. 数学名词审定委员会；

8. 学会办公室；

9. 理事会或常务理事会决定设立的其它工作机构.

各工作机构在理事会领导下，负责组织职责内的各项活动.

各工作机构的成员和负责人，由理事会或常务理事会聘任.

第十五条 根据学科发展需要设立学科分会和学科委员会，需经常务理事会讨论通过，并经中国科学技术协会批准. 学科分会和学科委员会是在理事会领导下，负责组织本学科学术活动的学术机构，其工作是：

1. 组织本学科的学术活动；
2. 承办本会有关学科的各项工作；
3. 编辑出版本学科学术刊物；
4. 开展对外学术交流活动.

第十六条 各省、市、自治区设立省、市、自治区数学会.

省、市、自治区数学会受该省、市、自治区科学技术协会的领导，在业务上受中国数学会的指导.

第四章 经　费

第十七条 经费来源：

1. 中国科学技术协会拨款；
2. 有关业务部门补助；
3. 本会举办的各种事业收入；
4. 会员会费；
5. 个人或团体捐赠.

第五章　附　　则

第十八条　本会章程经全国会员代表大会通过后施行，并报中国科学技术协会备案.

本会章的解释权属于常务理事会.

（四）中国数学会章程

（中国数学会第六届理事会第一次会议
一九九一年八月二十二日通过）

第一章　总　　则

第一条　中国数学会（以下简称本会，对外全称：Chinese Mathematical Society，缩写 CMS）是依法登记的全国数学工作者的学术性群众团体. 是中国科学技术协会（以下简称中国科协）的组成部分.

第二条　本会的宗旨是认真贯彻党的基本路线和“百花齐放，百家争鸣”的方针，充分发扬民主，开展学术上的自由讨论. 提倡辩证唯物主义，坚持实事求是的科学态度和优良学风，倡导献身、创新、求实、协作的精神，团结广大数学工作者，为促进数学的发展，繁荣我国的科学技术事业，促进科学技术的普及与推广，促进科学技术人才的成长与提高，为振兴经济，促进两个文明建设，加速实现我国社会主义现代化做出贡献.

第三条 本会的主要任务是：

1. 开展各种形式的国内外学术交流活动；

2. 编辑出版数学学术刊物；

3. 开展数学普及工作；

4. 开展促进提高数学教学水平的活动；

5. 根据国家建设和学科发展的需要，举办各种培训班、讲习班或讨论班等，努力提高会员的学术水平，并积极发现人才向有关部门推荐；

6. 对国家重要的科学技术政策和有关的重大科学技术项目接受咨询，积极提出合理化建议，经常向有关部门反映数学工作者的意见和要求；

7. 奖励、表彰有突出贡献的数学工作者；

8. 提倡鼓励会员理论联系实际，重视数学与其它学科的联系.

第二章 会 员

第四条 本会会员分个人会员、团体会员和通讯会员三种.

1. 凡承认本会章程，并具有下列条件之一者（包括港澳台同胞），均可申请入会为个人会员.

（1）具有讲师、助理研究员、工程师、中学一级教师以上职称的从事数学或与数学有关工作的科技人员；

（2）取得硕士以上数学学位的科技人员；

（3）高等院校本科单业，在研究、教学、生产企事业单位或科研教育、组织管理部门从事数学工作三年以上，并具有一定水平者；或虽非高等院校本科毕业，但已具有相当于以上规定人员的学术水平者；

（4）热心数学研究或教学事业，并积极支持本会工作的有关

部门的人士.

2. 凡与数学有关并愿意支持本会工作的有关科研、教学、生产企业事业等单位，均可向本会提出申请为团体会员.

3. 海外华侨和外籍数学工作者，承认本会会章，符合上述个人会员条件者，提出申请，可接受为本会的通讯会员.

第五条 入会手续

1. 个人会员入会须由本人自愿申请，由本会会员一人介绍或所在单位推荐，经所在省、直辖市、自治区数学会或学科分会审查批准后，即为中国数学会会员.

2. 团体会员入会，可向本会直接申请，经本会常务理事会审核通过，即为中国数学会团体会员.

3. 通讯会员入会，需向本会直接申请，由本会会员一人介绍，经本会秘书长审核，理事长批准，即为中国数学会通讯会员，并报中国科协备案.

第六条 会员的权利

1. 个人会员的权利为：

(1) 有选举权和被选举权；

(2) 对本会工作有建议、批评权；

(3) 优先参加本会组织的各种学术活动；

(4) 优先获得有关的本会刊物和学术资料.

2. 团体会员的权利为：

(1) 参加本会有关的学术活动；

(2) 优先取得本会的学术资料；

(3) 对本会工作有建议、批评权；

(4) 可要求本会优先承办咨询服务；

(5) 可要求本会协助举办培训班等.

3. 通讯会员的权利为：

(1) 可优惠获得我会公开发行的学术刊物；

(2) 可申请参加我会主办的学术会议；

(3) 可在我会主办的学术刊物上发表学术论文.

第七条 会员的义务

1. 个人会员的义务为:

(1) 遵守本会会章;

(2) 执行本会的决议;

(3) 积极参加本会组织的有关活动,推动本会工作;

(4) 按期缴纳会费.

2. 团体会员的义务为:

(1) 支持本会组织的有关活动;

(2) 按期缴纳会费.

3. 通讯会员的义务为:

(1) 支持本会有关活动;

(2) 按期缴纳会费.

第八条 个人会员的会籍及日常管理工作,由各省、直辖市、自治区数学会或学科分会负责,由本会统一颁发中国数学会会员证. 团体会员、通讯会员均由本会直接联系及管理,并发给团体会员证或通讯会员证.

第九条 会员有退会自由. 会员不缴会费,则停止享受其会员的权利(自本会开始收费时起实行). 会员如有明显损害本会声誉的行为,经省、直辖市、自治区数学会或学科分会讨论通过,并报本会常务理事会批准,可予以除名.

第三章 组织机构

第十条 本会的组织原则是民主集中制.

本会的最高权力机构是全国会员代表大会. 全国会员代表大会的代表由各省、直辖市、自治区数学会推选的代表,以及本届理事和特邀代表组成. 全国会员代表大会应结合学术交流一并举

行，一般四年召开一次，必要时由理事会讨论决定，可延期或提前举行.

全国会员代表大会的任务是：

1. 决定本会的工作方针和任务；
2. 审查理事会的工作报告；
3. 审计学会经费收支情况；
4. 选举新的理事会；
5. 制订和修改本会章程.

经理事会讨论决定必要时可不召开全国会员代表大会，采用适当方式产生理事会，并召开理事会会议，执行代表大会的任务.

第十一条 理事会是会员代表大会闭会期间的领导机构，其职责为：

1. 执行全国会员代表大会的决议；
2. 制订本会工作计划；
3. 领导所属工作机构和学术机构开展活动；
4. 指导并协助各省、直辖市、自治区数学会的工作；
5. 分配活动经费并监督其使用情况；
6. 召开下届代表大会.

第十二条 理事会用无记名投票的方式选举出理事长一名、副理事长若干名、秘书长及常务理事若干名组成常务理事会. 常务理事会是理事会的常设机构，在理事会闭会期间行使理事会的职责和日常会务的领导工作.

根据工作需要，由常务理事会聘任副秘书长若干人，协助秘书长工作.

理事任期为四年，连选可连任，但连续任期不得超过两届，隔届可再当选.

理事长任期一届，不连选连任.

第十三条 由常务理事会提名，经理事会讨论决定，对我国数学发展或数学教学工作有突出贡献，并对本会工作有重要贡献

的老一辈数学家，授于名誉理事称号.

第十四条 理事长为本会法人代表. 必要时理事长可委托秘书长或某副理事长行使法人代表职权.

第十五条 理事会根据工作需要，设立下列工作机构：

1. 学术交流工作委员会；
2. 编辑出版工作委员会；
3. 国际交流工作委员会；
4. 组织工作委员会；
5. 普及工作委员会；
6. 传播工作委员会；
7. 教育工作委员会；
8. 咨询服务部；
9. 数学名词审定委员会；
10. 学会办公室；
11. 理事会或常务理事会决定设立的其它工作机构.

各工作机构在理事会领导下，负责组织职责内的各项活动.

各工作机构的成员和负责人，由理事会或常务理事会聘任.

第十六条 根据学科发展和学术活动的需要设立学科分会或专业委员会，须经常务理事会讨论通过，并经中国科协备案. 学科分会和专业委员会是在理事会领导下，负责组织本学科学术活动的学术机构，其工作是：

1. 组织本学科的国内外学术交流活动；
2. 承办本会有关学科的各项工作；
3. 编辑出版本学科学术刊物.

第十七条 各省、直辖市、自治区设立省、直辖市、自治区数学会.

省、直辖市、自治区数学会受该省、直辖市、自治区科协的领导，在业务上受中国数学会的指导.

第四章　经　　费

第十八条　经费来源：

1．中国科协拨款；

2．有关业务部门补助或资助；

3．本会举办的各种活动收入；

4．会员会费；

5．个人或团体捐赠．

第五章　附　　则

第十九条　本会终止须经全国会员代表大会讨论，并由三分之二多数通过方为有效．

第二十条　本会章程经全国会员代表大会或理事会会议通过后施行，并报中国科协备案．本会章的解释权属于常务理事会．

附录三

陈省身数学奖第一至五届颁奖情况

届次	颁奖时间	颁奖地点	获奖者	出生年月	工作单位	获奖成果
一	1987.5.6	南开大学	钟家庆	1937.12	中国科学院数学所研究员	关于复分析及微分几何的优秀工作，包括特征值的估计及某种 Einstein-Kahler 空间的确定.
			张恭庆	1936.5	北京大学数学系教授	发展了 Morse 的孤立临界点理论及它在非线性微分方程的应用而获得深刻的存在定理.
二	1989.10.9	北京科学会堂	李邦河	1942.7	中国科学院系统科学所研究员	微分拓扑的研究成果，包括微分流形浸入理论的研究.
			姜伯驹	1937.9	北京大学数学系教授	拓扑学中的不动点理论的研究成果，包括对 Nielson 理论的研究.
三	1991.5.19	南开大学	肖刚	1951.9	华东师范大学数学系教授	对一般型代数曲面的分类理论研究成果，特别在曲面纤维化方面的研究.
			冯克勤	1941.10	中国科技大学数学系教授	代数数论中整体域的类群和分圆单位群代数结构及分圆单位系的独立性的研究.

续表

届次	颁奖时间	颁奖地点	获奖者	出生年月	工作单位	获奖成果
四	1993. 5. 14.	南开大学	丁伟岳	1945. 4	中国科学院数学所研究员	非线性偏微分方程及其在微分几何中的应用方面的研究成果.
			忻元龙	1943. 2	复旦大学数学所教授	微分几何中调和映照的研究成果.
五	1995. 5.	北京清华大学	洪家兴	1942. 1	复旦大学数学系教授	偏微分方程及其在几何中的应用等方面的研究成果.
			马志明	1948. 1	中国科学院应用数学所研究员	对狄氏型、马氏过程及随机分析等方面的系统而深入的成果.

附录四

华罗庚数学奖第一至二届颁奖情况

届次	颁奖时间	颁奖地点	获奖者	出生年月	工作单位职称	获奖成果
一	1992.11.4	北京科学会堂	陈景润	1933.5	中国科学院数学所研究员	解析数论中的 Goldbach 猜想等研究成果.
			陆启铿	1927.5	中国科学院数学所研究员	多元复变函数论等方面的研究成果.
二	1995.5.	北京清华大学	谷超豪	1926.5	复旦大学数学所教授	微分几何、偏微分方程和数学物理等方面的研究成果.
			万哲先	1927.11	中国科学院系统科学所研究员	代数学与组合论等方面的研究成果.

附录五

中国队参加国际数学奥林匹克（IMO）的简况

时间 届次 地点	学　生	所在学校	获得奖牌	团体名次
1985年 第26届 芬兰 赫尔辛基	吴思皓 王　锋	上海向明中学(高二) 北京大学 附中	铜牌	
1986年 第27届 波兰 华沙	方为民 张　浩 李平立 荆　秦(女) 林　强 沈　建	郑州河南省实验中学 上海大同中学 天津南开中学 西安第八十五中学 湖北黄冈中学（高二） 江苏泰县姜堰中学	金牌 金牌 金牌 银牌 铜牌	4
1987年 第28届 古巴 哈瓦那	滕　峻(女) 刘　雄 潘子刚 林　强 高　峡 何建勋	北京大学附中 湖南湘阴第一中学 上海向明中学 湖北黄冈中学 北京大学附中 广东华南师大附中	金牌 金牌 银牌 银牌 铜牌 铜牌	8

续表

时间 届次 地点	学　生	所在学校	获得奖牌	团体名次
1988年 第29届 澳大利亚 堪培拉	何宏宇	四川彭县中学(高二)	金牌	2
	陈　晞	上海复旦大学附中	金牌	
	韦国恒	湖北武钢第三中学	银牌	
	邹　钢	江苏镇江第一中学	银牌	
	王健梅(女)	天津南开中学	银牌	
	查宇涵	南京第十中学	银牌	
1989年 第30届 联邦德国 布伦瑞克	罗华章	四川重庆永川中学	金牌	1
	蒋步星	新疆石河子第五中学	金牌	
	俞　杨	吉林长春东北师大附中	金牌	
	霍晓明	江西景德镇景光中学	金牌	
	唐若曦	四川成都树德中学	银牌	
	颜华菲(女)	北京中国人民大学附中	银牌	
1990年 第31届 中国 北京	汪建华	陕西汉中西乡中学	金牌	1
	周　彤	湖北武钢第三中学	金牌	
	王　崧	湖北黄冈中学 (高二)	金牌	
	余嘉联	安徽铜陵第一中学	金牌	
	张朝晖	北京第四中学	金牌	
	库　超	湖北黄冈中学 (高二)	银牌	
1991年 第32届 瑞典 斯德哥尔摩	罗　炜	黑龙江哈尔滨师大附中(高二)	金牌	2
	张里钊	北京大学附中	金牌	
	王绍昱	北京大学附中	金牌	
	王　崧	湖北黄冈中学	金牌	
	郭早阳	湖南长沙湖南师大附中	银牌	
	刘彤威	北京大学附中	银牌	

续表

时间 届次 地点	学　生	所在学校	获得奖牌	团体名次
1992年 第33届 俄罗斯 莫斯科	沈　凯	江苏南京师大附中	金牌	1
	杨保中	河南郑州第一中学	金牌	
	罗　炜	黑龙江哈尔滨师大附中	金牌	
	章　寅	四川成都第七中学	金牌	
	何斯迈	安徽安庆第一中学(高二)	金牌	
	周　宏	北京大学附中(高二)	金牌	
1993年 第34届 土耳其 伊斯坦布尔	周　宏	北京大学附中	金牌	1
	袁汉辉	广东华南师大附中	金牌	
	杨　克	湖北武钢第三中学	金牌	
	刘　炀	湖南长沙湖南师大附中	金牌	
	张　镭	山东青岛第二中学	金牌	
	冯　炯	上海向明中学	金牌	
1994年 第35届 香港	姚健钢	北京中国人大附中	金牌	2
	张　健	上海建平中学	金牌	
	彭建波	湖南长沙湖南师大附中	金牌	
	王海栋	上海华东师大二附中	银牌	
	奚晨海	北京大学附中	银牌	
	李　挺	四川内江市安岳中学	银牌	

附录六

中国数学会第七次代表大会暨60周年年会在京举行

中国数学会第七次代表大会暨60周年年会于1995年5月18日至21日在北京清华大学举行．来自全国各地的260多位数学工作者聚集一堂，隆重庆祝中国数学会成立60周年．应邀参加这次盛会的，还有世界著名数学家陈省身、丘成桐，旅美青年数学家田刚、林芳华，以及香港数学会会长、香港科技大学数学系教授杨重骏，香港大学数学系教授廖明哲等．

在5月18日上午举行的大会开幕式上，全国政协副主席、中国科协主席朱光亚，中国科学院常务副院长路甬祥到会祝贺并作了重要讲话（全文另发）；国家自然科学基金委员会主任张存浩、副主任陈佳洱亦出席了大会，清华大学校长王大中在大会上讲话，代表清华大学向中国数学会表示热烈祝贺．

中国数学会理事长杨乐代表常务理事会发表讲话，回顾了中国数学会与我国数学事业六十年的光辉历程，总结了近四年来中国数学会的各项工作，同时对我国数学的发展前景与面临的任务作了展望与论述．

开幕式上，路甬祥副院长向世界著名数学家陈省身、丘成桐颁发了中国科学院外籍院士证书，接着陈省身与丘成桐在大会上分别致词（全文另发）．

在开幕式上还进行了第二届华罗庚数学奖和第五届陈省身数学奖的颁奖仪式．路甬祥与张存浩分别向第二届华罗庚数学奖获

奖人谷超豪与万哲先颁发了奖状和奖金；陈省身与丘成桐分别向第五届陈省身数学奖获奖人洪家兴与马志明颁发了奖状和奖金.

这次代表大会上，修改并通过了中国数学会新的章程. 全体代表投票选举产生了由77名理事组成的中国数学会第七届理事会，进而通过发扬民主，讨论酝酿提出了第七届常务理事候选人名单. 5月21日下午召开了第七届理事会第一次会议，杨乐理事长主持会议，选举产生了由21名常务理事组成的中国数学会第七届常务理事会，并选举产生了正、副理事长，秘书长(任期为1996. 1. 1—1999. 12. 31). 接着召开了第七届常务理事会第一次会议，张恭庆理事长主持会议，会议讨论通过聘任副秘书长和各工作委员会负责人的名单，并通过组成了新的"华罗庚数学奖"评奖委员会和"陈省身数学奖"评选委员会. (详细内容请见《中国数学会通讯》1995第3，4期报导).

这次年会的主要内容是学术交流. 应邀出席年会的著名美籍华裔数学家陈省身、丘成桐在第一天的全体大会上作了内容精彩的一小时学术报告. 专程回国参加本次年会的旅美青年数学家田刚、林芳华等的学术报告，也受到了热烈的欢迎. 年会安排了31个45分钟的分组报告. 这些学术报告介绍了国内外的最新动态，吸引了广大听众的兴趣. 还有120多篇论文在分组会上进行了交流，这些论文反映了近年来我国数学研究的一些进展和成果.

现将1小时报告和45分钟报告的报告人及其报告题目列述如下：

一小时大会报告：

陈省身　　六十年的微分几何

丘成桐　　微分几何的内容和意义

45分钟学术报告(以姓氏笔划为序)：

万哲先　　有限域上的典型群的几何学及其对组合论的应用

马志明　　狄氏型在数学和物理其他领域的若干应用

文　兰　　关于微分动力系统近来的发展

王诗宬　有限群在流形上的作用
尹景学　退缩非线性抛物方程与某些相关的函数空间
邓东皋　小波分析的某些进展
龙以明　Hamilton 系统的周期解研究中的新进展
田　刚　量子上同调和它的结合律
史树中　金融数学与非线性分析
冯克勤　数论、群论和图论
刘嘉荃　无穷远处的临界点
任佳刚　拟必然随机分析
李　忠　Teichmuller 理论及其应用
李邦河　关于三维流形的 Witten 不变量
李安民　与 Monge-Ampere 方程相关的几个几何问题
杨重骏　Uniqueness Theorems of Meromorphic Functions
严士健　数学教育的一些思考
谷超豪　广义自对偶杨-米尔斯方程和高维时空的孤立子
陆启铿　多复变函数论的回顾与前瞻（兼略述近代数学物理新发展）
陈志杰　代数曲面的研究情况
忻元龙　调和映射及其应用
林　群　有限元方法的效率
林芳华　Analysis on Alexandroff Spaces
周毓麟　具并行本性的差分格式
洪家兴　2 维黎曼流形在 R^3 中的实现
袁亚湘　从拟牛顿法到非拟牛顿法
贾朝华　数论中的课题与方法
耿　直　概率专家系统及其学习
龚　升　多复变数的双全纯映照
韩厚德　无界区域上的偏微分方程的数值解
廖明哲　On Exceptional Sets for Binary Sums

在中国数学会六十周年年会开幕式上的讲话

朱光亚（全国政协副主席、中国科协主席）

大会主席、杨乐理事长、各位贵宾、各位代表：

首先，我要感谢杨乐理事长代表中国数学会对我们的盛情邀请. 能够和这么多位数学家在一起，共同庆祝中国数学会成立 60 周年和第七次代表大会的召开，这使我和中国科协党组书记、书记处书记张玉台同志感到十分荣幸和高兴. 请允许我代表中国科学技术协会向大会表示热烈祝贺，向全体代表并通过你们向全国广大数学工作者表示崇高的敬意和亲切的问候！中国数学会的 50 周年庆典是于 1985 年在上海举行的. 当时的中国科协主席周培源教授应邀到会，并发表了热情洋溢、内容生动的讲话，在座诸位中可能有不少人是那次会议的参加者，恐怕还记忆犹新. 就在那次会议上，周培源教授着重强调“学术交流活动是科学技术工作中个人钻研和集体智慧相结合的一种形式”,学术交流活动一定要坚持党的“百家争鸣”的方针. 这在中国数学会的历史乃至整个中国科技团体史上都是很有意义的.

数学既是一门抽象的自然科学基础学科，又是一门几乎无处不在，哪一门自然科学、工程技术、社会科学学科都离不开的重要学科.

中国数学会成立以来的 60 年，尤其是 1978 年恢复活动以来的 17 年的工作是卓有成效的. 特别是在促进学科发展、培养人才方面成绩最为突出. 说到这里，我又想起了我的前任、中国科协

第三届全国委员会主席钱学森教授与中国数学会的一段友谊. 1989 年初，钱学森主席就我国理工科大学的数学教育改革问题致函当时的中国数学会理事长王元院士，表达了他的观点和建议. 王元理事长认为钱学森主席的观点和建议很重要，随后便以中国数学会的名义召开了数学教学与科研座谈会，邀请钱老参加并发表讲话. 那次座谈会和随后的一系列座谈会、讲习班提出的观点和建议，对我国的数学教育改革起了推动作用. 这正是我们中国科协所起的桥梁纽带作用的体现之一，也是中国科协履行作为党和政府发展科技事业助手的职责的一种具体表现.

中国数学会的优良工作不仅促进了数学事业在我国的发展，促进了数学人才的成长和提高，密切了我国数学界与国际数学界的交往，同时也提高了中国数学会在国内外的知名度. 借此机会，我要对中国数学会历届理事会和全体专兼职工作人员多年的勤奋劳动道一声辛苦，向你们致以亲切的问候.

根据中国的国情，中国科协所属的 165 个全国性学会中的绝大多数的办事机构都有一个部（委）、科研院所或高校作为它们的挂靠单位，并且从挂靠单位获取一定的人、财、物力的支持. 多年来，作为中国数学会挂靠单位的中国科学院数学研究所，在自身条件相当困难的情况下，对中国数学会给予了力所能及的支持. 难能可贵，功不可没. 在此，也请中国科学院数学所的历届领导接受我由衷的谢意.

最近，在党中央批准的《中国科协机关机构改革方案》中，明确规定了中国科协的七项任务，其中一项就是“对所属全国性学会进行管理，对地方科协进行业务指导”. 对全国性学会进行管理的问题牵扯中国科协、民政部、学会的挂靠单位和学会本身，要把四者的职责搞清，关系理顺，为学会的生存和发展创造一个较好的外部环境，事关重大，不容我们掉以轻心. 目前，我们正在组织力量，在调查研究的基础上制订一个对全国性学会进行管理和服务的实施方案. 希望中国数学会提出你们的宝贵意见和建议.

同志们，你们这次代表大会即将选出新的一届理事会，我和张玉台书记及其他的领导同志，预祝新的理事会全体成员在未来的工作中取得更多更好的成绩，为全国性学会深化改革，更出色地完成章程所赋予的各项任务提供新的经验. 再过一星期，由党中央、国务院召开的全国科学技术大会即将隆重开幕了，让我们努力贯彻即将发布的《中共中央、国务院关于加速科学技术进步的决定》，为科技、经济、社会的综合协调发展作出更多的贡献.

祝大会取得圆满成功！

在中国数学会六十周年年会开幕式上的讲话

路甬祥（中国科学院常务副院长）

尊敬的杨乐会长，各位贵宾，各位代表：

我本来没有准备在这个会上致词，刚才大会主持人要我讲几句话，我就作一个即席的发言吧.

我也跟光亚主席一样，感到非常荣幸，今天有机会参加中国数学会六十周年的庆典，跟这么多数学家在一起. 我记得，我在念中学的时候就非常仰慕数学家，想要选择数学作为我今后学习的方向，但是也许因为天份，也许因为我努力得不够，后来没有成为事实，选了工程专业. 但是我对数学、对数学家仍是非常仰慕的.

众所周知，数学是一门非常重要的学科，它的发展影响到基础科学，同时它影响到不光我们自然科学，现在也影响到社会科学，影响到各个方面. 从这个角度来说，数学应该是现代科技的一个带头的学科，数学理所当然应该受到更多的重视.

我们中国的数学界从来有很好的传统——学术民主，治学严谨，提倡研究与教育紧密的结合，提携青年，鼓励创新. 所以即使是我们数学会成立以来六十年，我们国家多灾多难，各种不同的条件下，我们中国的数学还是得到了举世瞩目的发展，培养了一批又一批的数学大家和许多优秀的人才. 我想，这种传统在现在新的历史时期，理所当然地应该得到继承并发扬光大.

当前，我们杨乐会长讲到市场经济给我们数学的发展既带来

了新的机遇，同时我们在数学教育方面也存在着这样那样的问题和困难，我想这是很实在的．我觉得从整体来看，展望未来的话，应该是前景美好的．首先是在科学本身，数学发展到现今，必然它自身有更进一步的发展的宽广的前景与动力．同时我们生命科学、认知科学、天文学、信息科学以及经济学方面的许多进展，也对数学提出了新的命题与挑战，为我们开拓了一些新的、可以思考的领域，那么，也给我们提供了一些机遇．我想中国的社会主义市场经济，它引导我们国家走向繁荣与富强，引导我们国家要在本世纪末实现小康水平以后，继续向中等发达国家的目标前进，随着我们国力的增强，我们无论是对数学的需求也好，无论是对数学的支持也好，一定会越来越多地得到社会各方面，包括政府的理解与支持．

中国科学院作为中国的一个自然科学与高技术的研究与发展的重要团体，理所当然地我们要把数学的发展作为我们一个重要的责任，象过去历史上一样地更加重视基础数学，重视应用数学，重视数学前沿新的分支，重视数学方面优秀人才的培养．同时我们也充分地理解到，无论是数学科学也好，或者其它学科也好，科学院必须跟社会各方面联合起来，团结起来，为振兴我国的科学事业而奋斗．特别是跟高校，跟企业，跟社会各个方面，互相补充，互相联合，才能够推动我们国家的科技与经济的发展．

最后，请再次允许我代表中国科学院，向中国数学会六十周年庆典表示衷心的祝贺，向即将要选出的数学会新的一届理事会表示衷心的祝愿．祝我们中国数学会在继承和发扬历届理事会的光荣传统的基础上，为发展我们中国的数学事业作出更大的贡献．祝各位在座的数学家身体健康，在研究工作中有更多的创新．

谢谢！

（根据录音整理，未经本人审阅）

在中国数学会六十周年年会开幕式上的讲话

陈省身（中国科学院外籍院士）

今天很荣幸能参加这个庆祝会，而且可以致词. 对我讲呢，是有特别意义的. 因为我们大家都知道，中国数学会是 1935 年成立的，数学会前前后后我差不多都参加了，例如说十年前在上海的五十周年庆祝会，我也有机会参加.

1935 年是中国困难的一年，那时候日本侵略是非常厉害，迫在眉睫的. 我们都知道 1937 年发生卢沟桥事变，中日两个国家正式冲突了. 这是中国历史上非常艰苦的时期，中国死的人，按最近的报导有三四千万人. 那么，讲到数学，那时数学会成立是在上海，上海是在租界的保护之下. 国内的几个重要大学，如西南联合大学、清华大学、北京大学、南开大学，或者数学很有地位的大学，如浙江大学都是在沿海、在战区的地方，数学的工作没法进行. 我们几个朋友，包括华罗庚先生，在昆明西南联合大学，我们觉得数学的工作不能停顿，所以我们成立了一个"新中国数学会". 因为不能再成立一个，很麻烦，我们也没有这个意思，我们对政治一点经验也没有，也不知道怎么搞法好. 就用一个新名字，叫做"新中国数学会"，姜立夫先生是会长，华先生是会计，我是文书. 信就是由我来写，这样我们几个就把事情给做了. 在昆明有一次开年会，陈建功先生从贵州湄潭（那时浙江大学在湄潭）到昆明来，来参加我们这个会. 当时新中国数学会也有出版，出版了好几期中国数学会的杂志. 我希望这个杂志国内还能够找

得到，有些还是过得去的论文.

我给你们讲讲我所知道的一部分中国数学会和新中国数学会的历史，现在这方面的历史记载还没有，也许有一天我会把这些，把我的经历写下来.

国家胜利了，不能有两个数学会. 数学家解决这个问题非常简单，因为谁都不愿做会长，做会长显然就是要取消新中国数学会的“新”. 我们这些搞新中国数学会的人要是从政治眼光上讲，“新”字取消是很大的事情. 我们和华罗庚同志想，取消就取消吧，就变成了一个，当然是中国数学会. 那么然后很明显，就是改选，全国的人（包括台湾在内），一起改选，成立一个新组织. 问题完全就解决了，没有什么问题的. 有很巧的一件事情，就是刚才我讲新中国数学会的会长是姜立夫先生，原来中国数学会的会长是胡敦复先生，当年他是上海大同大学的校长，姜先生的夫人就是胡先生的妹妹. 有一天，我请他们到我家吃饭，大家这么一来，我弄了一个名单（就是从教育部拿到的），包括所有大学的教职员在内，请大家选举. 选举完了以后新的组织就产生了，我们这几个人的事情就没有了. 我个人是觉得人生最好的事情就是没有职务，什么都不要管. 这个，我想跟诸位多年来所受的教育很不一样.

总而言之，虽然中间有这么一段插曲，我不敢说有多么完全可靠，可能完全是我个人的观点. 这个观点，如果有人对中国数学会的历史有兴趣的话，有机会我要跟他们谈谈，把它们弄得准确一些.

还有一个事情，我要跟诸位报告的，就是中国数学会在国际数学组织中的地位. 我们知道中国数学会的国际组织是国际数学联盟（International Mathematical Union，简称 IMU）. 台湾是这个组织的成员. 你们诸位有国际交往经验的话，都知道这种问题，这个结是不太容易打开的. 1990 年国际数学家大会在美国加州 Berkeley 开会，我在那里. 中国、台湾都有代表去，我都认识，都是熟人. 不但如此，IMU 的会长 Jürgen Moser 是瑞士苏黎世高工

的教授，我跟他不但熟得很，而且还一同写过文章，我想我们把中国统一问题解决了，我跟他谈了半天．也许你们有兴趣，IMU的会员分五级，最高的是第五级，最低的是第一级，每个会员交的会费与你的级数有关，要五级就是五倍．台湾，因为它地方小，它这会员就是一级．中国当时有个问题，中国要加入这个国际数学联盟应该是第几级．美国、苏联当时是第五级，后来法国要把他放在第四级，因此大家有些争论．结果呢，把中国算第五级，那次在 Berkeley 讨论中国参加 IMU 是第五级，中国大陆出三位代表，台湾出两位代表，由 IMU 分别通知他们到会，可是代表的正式名字是“CHINA”，是“中国”．到那时，住在一起，都是朋友嘛，完了之后呢，到我家吃了一顿饭，大家都很融洽．所以我就很有意思地向大家报告一下，数学上中国是统一了．

（根据录音整理，未经本人审阅）

在中国数学会六十周年年会开幕式上的讲话

丘成桐（中国科学院外籍院士）

谢谢主席，谢谢各位嘉宾：

今天很荣幸地在这里接受外籍院士证书. 首先，我要感谢我的指导老师陈省身先生，他今天和我一起接受了外籍院士的证书，感谢他多年来的栽培.

去年杨乐写信给我讲，中国科学院将颁给我外籍院士证书，我觉得很高兴，很荣幸，可是我也觉得很惭愧. 我对杨乐讲，我宁愿希望我是中国籍的院士，而不是外籍院士，因为我在国外有二十五年了，有二十年的时间我是无国籍的人士. 到了 91 年因为发生了车祸的事情，没办法入了美国籍. 这件事到了现在，我还觉得很惭愧. 我为这个事情和杨振宁先生谈了很久，杨振宁劝我进了美国籍. 两个礼拜前，我参加了杨先生的一个颁奖仪式，他获得了 Power 奖.

因为我想应当讲讲杨先生的工作，所以我看了他的书（论文集），杨先生在里面提到了他参加美国籍的问题，他在里面提到一句，讲他参加美国籍，他的父亲对他不会原谅. 我觉得也有这种感觉. 可是我也觉得很骄傲，我能够接受这个院士，我也期望我能够多多帮忙，为国内数学的发展，因为无论在什么情形下，我还是把自己看作是中国籍的人士；同时，虽然我是一个美籍的人士，数学是无国籍界限的.

我们作数学是求真的一门学问，所以我觉得我有资格提供国

内数学发展的意见. 我们国内讲了很久，期望二十一世纪，能够成为数学大国. 但是我们也晓得五十年代、六十年代我们讲过的“五年计划”、“十年计划”，要“超英”、“赶美”，我们期望是这个样子. 我们期望二十一世纪能作成世界数学大国，可是也不期望我们做“小高炉炼钢”的事情. 比较一下我们能不能成为二十一世纪的世界数学的超级大国，我觉得有可能. 我们在培养中国的研究生方面，我记得我们在 84 年的时候，培养了一大批中国留学生. 现在到了十年的工夫，刚才杨乐理事长讲过，近年有很多培养出来的中国留学生在国际上很有名望，他们在国际数学家大会上有 45 分钟的演讲，也有很多人拿了国际上有名的奖. 我们讲他们已达到世界上第一流的水平，他们受到重视是绝对没有问题的，人数也不少，所以我们可以相信十年内培养第一流的数学人才是没问题的. 可是为什么在国外培养出这么多优秀的人才，国内虽然也能培养，可人数少得多. 我想我们最好要脚踏实地，不要做“小高炉炼钢”的事情.

我们评论数学人才的时候，不要单找记者，或者一些领导(我不是有意侮辱我们的领导)，我是期望我们能够由内行的人来评审我们的数学人才. 这是向前面进展的一个主要的、坚决的、很正常的步骤. 假如我们能够好好地把我们的评审和资助工作弄好的话，十年，顶多十五年我们可以将我们国家的数学带到世界的最前面，我觉得是没问题的. 至于我和我们的朋友，甚至外国的朋友，是很愿意帮助我们的数学发展的.

谢谢大家!

(根据录音整理，未经本人审阅)

科学基金与中国数学的发展

程民德　　胡国定　　　　　　许忠勤
(北京大学)(南开大学)(国家自然科学基金委员会)

(一)

为更好地支持和发展我国的自然科学基础研究，1986年2月国家建立了自然科学基金制，成立了国家自然科学基金委员会(NSFC，下面简称“基金委”). 基金制的建立和基金委的成立是我国科技体制改革的重大举措. 它改变了过去计划经济体制下靠行政拨款方式来支持科学研究的旧体制，把竞争机制引入自然科学基础研究领域. 这样，既保证了基础科学研究的经费来源，又通过依靠专家评审、择优支持的运行程序，确保了经费支持的科学性和公正性，使得高水平的研究工作能获得较好的资助，从而更有效地推动了我国基础科学的发展.

基金委的成立，使我国数学研究的经费有了稳定的来源. 据统计，1987年到1989年三年中，我国数学的研究经费有将近80%来源于基金委. 还有少部分来源于国家科委设立的攀登项目以及中科院对其所属研究所所拨的数学研究专款. 但基金委在其成立的最初几年中能拿出资助数学研究的经费实在太少. 从86年到88年的三年间，每个批准项目的总经费不到一万元. 平均每年仅3000多元. 资助的规模也很有限，常常使一些很有研究基础的数学家都申请不到经费. 如何摆脱这个困境，是当时许多数学家非

常关心的问题，也是基金委领导非常重视的问题. 大家都在寻求为数学增加经费的途径和办法.

1987年春，当代数学大师陈省身教授在美国对美国之音记者发表了十分钟的谈话，谈的都是有关数学的问题. 中心内容是说：中国数学大有希望，只要大家努力，路子对头，可望在二十一世纪成为数学大国；这个重任将主要落在广大青年数学工作者身上. 陈省身教授的这个谈话，在我国数学界引起了不小的震动，许多数学家受到了很大的鼓舞. 这个谈话也引起了基金委领导的高度重视. 当时的基金委主任唐敖庆教授主持委务会，请有关领导一起听了这个谈话的录音，并确定了要大力支持数学早日赶上世界水平的方针. 胡兆森副主任还专程到天津拜访当时正在南开数学所的陈先生，当面向他请教加快数学发展的大计. 胡国定副主任在京津两地多次召集一些著名数学家座谈. 大家一致同意陈先生对中国数学发展前景的分析，认为数学研究与其他学科相比有一个不同之处：它更多地依靠研究者智力的角逐和竞赛，是中国人民擅长的学科. 尽管文革十年中，数学研究受到很大的干扰和破坏，但现在政治安定、政策稳定，只要路子对头，经费有保证，再加上数学家的团结努力、艰苦奋斗，它将会上得很快，完全有希望使中国在21世纪成为数学强国. 大家还认为，陈先生这个谈话是一股东风，我们要抓住这个时机，开一个会，讨论和决定中国数学发展的一些大问题.

1988年8月20日到22日，在基金委的全力支持帮助下，由吴文俊、程民德、谷超豪、王元、杨乐、冯康、胡国定、齐民友、堵丁柱、李克正等十位数学家发起，第一次《二十一世纪中国数学展望》学术会议在南开数学所举行. 基金委不仅提供全部会议所需经费. 而且多次听取如何开好会议的汇报. 师昌绪副主任还亲自向各方面宣传这次会议的重要性，并打电话请有关方面的领导参加会议. 中央领导同志李铁映、国家科委、国家教委、中国科学院、国家自然科学基金委的领导和陈省身教授出席会议开幕

式，并都讲了话．会上程民德教授代表大会组织委员会作了题为《群策群力，中国数学将在二十一世纪率先赶上世界先进水平》的报告，第一次把“率先赶上”的宏伟目标提到全国数学界的面前．这次展望会得到了党和国家领导的充分肯定．李铁映同志在会上就热情赞扬了国内数学家们的雄心壮志和奋发图强的精神，并对陈省身教授关于中国可望在21世纪成为数学大国的远见卓识，概括为“陈省身猜想”，表示国家一定要在软设备和硬设备两个方面大力支持数学家们努力来证实这一猜想．会后，我们于8月31日写出给李铁映同志和宋健同志的书面报告．12月18日李鹏总理等领导亲自批示，同意拨专款支持数学．

1989年初，国家自然科学基金委员会设立了“数学天元基金”，成立了天元基金学术领导小组．第一届学术领导小组组长为程民德教授，副组长为胡国定教授和堵丁柱研究员，组员为吴文俊、王元、谷超豪、杨乐、冯康、齐民友和李克正等教授，后又增加邓东皋、吕以辇、吴方和史树中四教授．根据国务院领导同志指示精神，天元基金由基金委管理，由天元基金学术领导小组来安排使用．1991年5月在南开数学所举行了第二次中国数学展望会议．这次会议主要内容是总结和验收“七五”数学重大项目《现代数学中若干基本问题的研究》的成果，展望“八五”中国数学的发展和规划“八五”的重大项目．宋健国务委员、国家科委、国家教委、中科院、国家自然科学基金委的领导和陈省身教授出席了会议，并都讲了话．宋健同志的讲话热情洋溢，充分肯定了数学取得的丰硕成果．

在南开数学所举行的两次展望会议，对中国数学的发展产生了重大影响．第一次展望会议提出了一个“率先赶上”的宏伟目标，争取到了一项专项基金，即数学天元基金，大大振奋了数学界的精神，这次会议的学术论文选集由北京大学出版社和德国斯泼林格尔出版社于1991年联合出版，有一定国际影响（天元基金对国内版有适当资助）．第二次会议展望了“八五”中国数学各分

支的发展，规划了“八五”数学主要资助方向和优先资助领域，从而形成了现在这样较为合理的资助规模和格局，为稳定一支较精干的数学研究队伍作出了贡献．同时，又把天元基金从原来的每年 100 万元争取到每年 200 万元．

天元基金的设立大大弥补了原来基金委内数学经费的不足．在“七五”期间由于经费太少，组织重大项目时无法考虑数学发展的根本需要，而只能选出少数几个在国际上比较活跃、国内基础也较好的课题进行重点支持．获得重点支持的数学家只有 72 人．到了“八五”期间，由于有了天元基金，也由于在基金委内数学经费有了较大幅度的增加，对数学资助的情况有了根本的好转．一方面我们以天元基金学术领导小组的名义，积极而有成效地向国家争取到三个以数学为主或者与数学关系密切的攀登项目．这三个项目是：以冯康教授为首席科学家的《大规模科学与工程计算的方法和理论》；以谷超豪教授为首席科学家的《非线性科学》，以吴文俊教授为首席科学家的《机器证明及其应用》．这三个项目获得批准后，有 80 位数学家得到较高强度的资助．另一方面，我们用天元基金的经费组织和资助了 14 个重点项目．它们是：解析数论；代数数论；代数几何；代数拓扑与微分拓扑；整体微分几何及物理应用；经典复分析；调和分析；偏微分方程的一般理论；椭圆偏微分方程；常微分方程分支问题及多项式系统理论；粒子系统与随机场；优化的算法与理论；量子群与代数群；图论．我们用基金委内的数学经费组织和资助了 16 个重点项目，它们是：多复变全纯映照理论；非线性分析；随机分析；多维数据的统计理论；随机和分布参数系统控制的数学理论；算子理论与算子代数；动力系统与哈密顿系统；李群及表示理论；组合数学；应用统计；群与代数的表示理论；计算复杂性的理论及应用；非线性发展方程；某些非线性数值分析；泛函微分方程及其分支理论；点集拓扑的若干新方向．总共 30 个重点项目，共有 193 人获得资助．这 30 个重点项目，基本上覆盖了数学的各个二级分支，

满足了我国数学整体上的需要．同时，这些项目也反映了国际数学发展的潮流，代表了我国数学的现状和水平．对这些项目的持续稳定支持将推动我国数学研究在整体上获得较快的发展．

天元基金的设立也大大拓宽了基金资助的范围．国家自然科学基金主要是通过对各类研究项目的资助来实现对自然科学各学科的支持．对于项目以外的事一般不予资助．而天元基金的使用却很有特色．根据中央领导同志指导的精神，基金委领导明确指示，“天元基金的使用将由数学家自已来安排”．这样，天元基金学术领导小组可以根据中国数学发展的需要，用天元基金支持一些数学界最重要、最紧迫的事情．

（1）天元基金最显著的特色是它尤其重视对青年的培养．首先我们非常注意对优秀青年人才的挖掘，一旦发现就会通过多种方式给予支持．有的被推荐参加重点项目的研究，如推荐彭实戈、陈叔平参加“随机和分布参数系统控制的数学理论”项目，推荐吴黎明参加“随机分析”项目等；有的根据滚动管理的原则，被吸收参加天元重点项目，“八五”期间，由滚动管理而吸收参加天元重点项目的共 16 人，而其中 40 岁以下的青年人就有 8 人，如贾朝华、张文鹏进入“解析数论”项目，边保军进入“椭圆型偏微分方程”项目，席南华进入“量子群与代数群”项目等；有的通过合作研究的方式把条件较差的单位的优秀青年选送到条件较好的单位去进修，“八五”期间我们资助这类项目多达 30 余项；有的推荐到基金委的数理学部，用科学部主任基金给予支持，如李安民、文兰等都曾用科学部主任基金支持过．

另一方面，几年来由天元基金组织和支持了许多次讲习班．这些讲习班大致分四种类型：一是我们同国家教委学位办公室共同支持和组织的数学暑期学校；二是我们同设立在法国尼斯的联合国教科文组织下属的《纯粹数学与应用数学中心（CIMPA）》合作，共同支持和组织的讲习班；这两类讲习班以大学高年级学生和研究生为主要对象，每年至少都要举办一次；三是以普及为主的边

远地区数学讲习班，这种讲习班以培养青年教师为主；四是以留学人员回国讲学为主的各种讲习班. 这些讲习班对于活跃学术研究，特别对于青年人才的培养起了很好的作用，受到了数学界广泛的热烈欢迎.

（2）天元基金采取了有力措施，来解决外文专业图书不足的问题. 数学研究离不开各种书刊资料，但是一个时期以来在图书馆和书店里，数学书刊越来越少，数学家和青年学生读不到、更买不到想读的国外数学文献. 天元基金设立后，我们同北京世界图书出版公司（光华出版社）签订合同，每年资助他们 15 万元，购买版权，而他们为我们每年影印 100 种国外的数学专著，并以七折优惠卖给数学家. 这样的工作已进行五年，很受欢迎. 许多数学家凭所发给的优惠卡，经常买到自己需要的外文书籍，从而大大缓解了外文专业书籍少的困难. 当然，这方面的工作还需加强，发行渠道还要更加畅通和扩大，以满足更多数学家的需要.

（3）天元基金为数学家配备计算机设备，开始更新国内数学研究的手段. 近年来，由于计算机技术的飞跃发展，在一些发达国家中，数学家已经开始从根本上改变他们传统的工作方式，各种类型的计算机设备及其软件逐渐成为他们最重要的研究工具. 大量可在微机上运算的数学软件包，诸如 Mathematica、Maple、SAS 等已经普及，它们大大节省了数学家的劳动. TEX 等数学排版软件已在国际上通用，使得许多国际学术会议已要求递交论文的同时，附上用 TEX 格式录入论文文件的软盘，越来越多的数学刊物和出版社要求作者用 TEX 格式打印书稿，数学文献的传播、编辑以及印刷的速度和质量都因而飞速提高. 使用带有 E-mail（电子邮件）系统的计算机的数学家，可以随时在网络上查询和调用各种数学文献，甚至尚未正式发表的预印本，并使得相隔遥远的数学家同行们可随时相互传递各自的工作、信函来进行讨论，以至发表公告. 甚至纯粹数学的研究也纷纷以计算机作为重要手段，例如，“四色问题”的证明、有限群的分类，Riemann 猜想的验证

都用到了计算机的大规模运行.面对这一数学研究电脑化的洪流，数学天元基金学术领导小组采取坚决措施，三年多来为国内452名数学家配备了计算机和打印机,同时帮助他们购置调制解调器，开通了E-mail. 这一举措标志着我国数学研究手段正在迅速现代化，它对中国数学的发展将起不可估量的作用.

(4) 天元基金还支持了通过其他渠道很难得到资助的一些改善数学环境的工作. 例如，更广泛地资助国际和国内的学术合作和交流，资助和组织出版《走向数学》、《当代数学园地》等数学丛书,资助开展数学教育现代化改革研究以及数学普及传播工作，其中包括组织拍摄数学普及录象片、资助中国现代数学史料搜集等等.这些工作使天元基金在数学界和群众中产生了更大的影响.

天元基金的设立使我们找到了一个能更有效地组织发展中国数学研究的运行机制. 几年来，天元基金学术领导小组和基金委数理学部的天元基金办公室密切配合，抓住上述一些全国数学界的一些根本性大事，注意处理问题的科学性和公正性，重视数学界的团结，进行统一规划、组织，安排和资助，使得经费真正用到刀刃上. 同时，有了天元基金学术领导小组，就有了为数学界争取资助和支持来说话的权威性学术机构. 其直接结果之一是使这几年来数学的研究经费有了很大幅度的增长. 6年前还没有天元基金时，基金委内数学经费全年不到150万元. 而去年数学总经费已达到800万元，预计今年数学总经费将要超过1000万元.

总之，实践表明，国家自然科学基金和数学天元基金相互配合使用对中国数学的发展已起了重要的作用，并将在今后发挥更大的作用.

(二)

中国数学要在21世纪率先赶上世界先进水平这一任务是非

常艰巨的．自然科学基金对于实现这个宏伟目标，完成这项历史任务将进一步作出其应有的贡献．在今后十年中，特别是在20世纪的最后五六年中，我们将充分运用基金这个杠杆做好以下几件事：

（1）继续控制资助规模，大力增加资助强度，努力争取稳定一支精干的数学研究队伍．

“八五”期间，自然科学基金（包括天元基金）通过对30个重点项目，近300个自由申请项目和120个青年基金项目的资助，支持了近2000名数学工作者从事研究工作．这个数字大约仅占全国有条件从事数学研究的数学工作者的20%．对于中国这样一个人口众多的国家来说，这样的资助规模还很不够．从每年基金受理和评审情况看，确还有不少较好的项目，因经费有限，规模被控制，而未获得资助．但是，目前我们最突出的矛盾还是对已支持的项目资助的强度太低．尽管在“八五”期间，由于有了天元基金，数学项目的资助强度增长很快，1994年我们对数学自由申请项目的资助强度已经是整个基金委的平均资助强度的40%（1988年只占30%），但平均每项也仅3万元，每项每年仅1万元．这点经费在现在的通货膨胀情况下，很难维持正常科学研究所需．因此，今后五、六年中，我们的主要任务是继续贯彻基金委控制规模的方针，保持“八五”期间的资助格局，千方百计地争取较大幅度地提高各类项目的资助强度，使得数学项目的平均强度达到基金委平均资助强度的60%．只有这样，“八五”期间我们资助的这支队伍才能稳得住．待达到这个标准后，我们再考虑适当扩大资助的规模．

（2）切实做好“八五”重点项目的结题验收和“九五”重大重点项目的立项实施工作．

今年是“八五”的最后一年．“八五”期间我们组织的30个重点项目将陆续完成，结题验收工作将开始进行．从我们已了解的情况看，许多项目进展顺利，成果累累，水平也是很高的．我

们将用很大的精力做好验收工作，把成果收集整理出来，把经验和存在问题也找出来，使“九五”重大重点项目的组织实施做得更好.

去年九月在香港举行的国家自然科学基金数学项目评审会和“九五”数学优先资助领域讨论会是一次非常重要、非常成功的会议. 这次会议通过了在“九五”期间数学的 18 个优先资助领域，它们是：

1. 数学机械化
2. 数论与算术代数几何
3. 整体微分几何与几何分析
4. 现代拓扑
5. 群与代数的表示理论
6. 复分析与复几何
7. 泛函分析与算子代数
8. 调和分析微局部分析及在偏微分方程中的应用
9. 非线性发展方程
10. 常微分方程与动力系统
11. 无穷维随机分析
12. 现代统计
13. 优化与控制
14. 科学与工程计算的方法和理论
15. 计算机科学中的数学基础
16. 现代数学物理
17. 小波分析与信号传输
18. 金融数学

这 18 个优先领域绝大多数是与会 31 名数学家全票通过的，它充分反映了我国数学界的共识. 这 18 个领域所包括的主要内容在去年苏黎世国际数学家大会上所列的议题和大会的发言中几乎都涉及到，它也体现了当前国际数学发展的热点和趋势. 同时，这

18 个领域所含主要内容基本覆盖了“八五”期间国家科委资助的三个与数学密切的攀登项目和基金委资助的 30 个重点项目的主要内容. 这既符合基础科学发展的规律，也符合我国数学的实际情况，代表我国数学发展的水平. 因此，香港会议所确定的我国数学近期要优先支持的领域，将能确保数学研究队伍的稳定和数学学科的正常发展，为我们做好“九五”重大重点项目的立项，奠定了很好的基础.

去年 12 月在北京举行的数学天元基金学术领导小组扩大会议同样是一次非常重要和成功的会议. 会议的一项重要结果是作出了“九五”重大重点项目人员组成必须年青化的决定，并通过了一些可操作的确保青年化的具体措施. 如规定，一个重点项目中 40 岁以下的至少有一人，60 岁以上的最多只能有一人，以确保项目成员的平均年龄要比“八五”下降两岁；同时决定实行顾问制，学术造诣较深、研究水平较高的老一辈数学家可以当项目的顾问，资助一定经费，不承担项目的任务，但要对项目的进行起指导咨询作用. 这样就为我们顺利做好“九五”重大重点项目的组织实施工作创造了条件.

(3)继续加强对优秀人才特别是拔尖人才的发掘支持和培养.

基金委十分重视对青年人的支持，早在 1987 年，也就是基金委成立的第二年，就设立了青年科学基金. 八年来共资助青年基金 4300 多项，其中数学有 217 项，约占总数的 5%；1992 年设立优秀人才基金，到 1994 年三年共资助优秀人才 79 名，其中数学有 5 名（彭实戈、马志明、龙以明、王诗成、王建磐；此外，还有与数学关系密切的郭雷），占 6.3%；1994 年又设立了国家杰出人才基金，资助 50 名，数学有 3 名（陈永川、徐超江、席南华），占 6%. 这些基金对支持我国年青一代数学工作者，激发他们的创造性研究，起了很好的作用.

今后我们除了继续加强对青年人才的支持外，还准备用天元基金大力加强对青年人的培养. 不久我们将出台一个称为“数学

2002 年人才工程计划”的新举措. 这个计划的主要内容包括两部分. 一是继续办好各种类型的讲习班，切实提高各类讲习班的质量，加强计划性和密切联系数学界的需要，讲求实效，使得参加讲习班的青年教师和学生都有收获. 二是要组织和支持 25 个左右的有国际水平的研究班. 办这类研究班的目的是要培养 120 名左右能攀高峰和攻尖端的拔尖人才. 研究班必须由具有国际水平的学术带头人来主持和领导，由基础好、能力强、对数学有浓厚兴趣、能为中国数学的振兴去拼博和献身的青年人参加. 对这类研究班要经过严格的评审方给予支持，一旦批准将给予高强度的资助和更宽松的研究环境. 我们不要求每年出多少论文、交进展报告，但 是要有一个高目标和切实可行的计划，希望经五六年的奋斗，工作有实质性的进展，有 1/4 的人的研究水平达到国际先进，有实力在激烈的国际竞争中争得一席之地.

(4) 进一步做好留学人员的工作，充分发挥他们的作用，争取他们为发展和繁荣中国数学做出重大贡献.

改革开放以来，我国先后有大批青年学生留学美国、日本和西方发达国家. 据不完全统计，在国外学习和工作的中国留学人员约 14 万人（北美 9 万，其余大多在日本和西欧），其中有一部分特别优秀的大多学成以后留在国外工作，有的还拿到绿卡，取得所在国的永久居住权. 这些留学人员绝大多数是爱我们社会主义祖国的，虽然目前因种种原因，还不能回国工作，但他们都想为祖国多做一些事.

我们数学界最早注意做留学人员工作. 早在 1988 年第一次“21 世纪中国数学展望”会议上，我们就邀请了正在美国、英国、法国、德国、日本等 10 多个国家学习或工作的 50 多名留学生回国开会，与他们共商发展中国数学的大计，并希望他们中一些人能学成回国工作. 天元基金设立后，每年都要邀请一些留学生回国短期访问. 实际上从 1990 年开始，田刚，林方华等一些在国外工作的优秀青年数学家几乎每年都回国一次. 1992 年在基金委内

我们最先提出希望设立支持留学人员短期回国讲学基金的建议，并率先邀请留美博士胡森、蒋云平，留法博士谭蕾，在北京组织了第一个以“一维动力系统的拓扑与几何”为内容的讲习班. 我们还先后两次出访北美、西欧专访一些留学人员，同他们共商如何为中国数学做贡献的方式.

从 1992 年设立留学人员短期回国讲学和工作基金后，三年来，我们先后资助 56 项、近 200 人次的留学人员回国开展多种多样的学术活动. 现在已形成以下几种受到国内数学界欢迎的模式：①请优秀的留学人员回国主持专题研究班，建立长期合作研究的关系；②支持优秀的留学人员回国兼任一些学术职务，如研究所所长，学术中心主任等等；③吸收优秀留学人员承担或主持我委的重大、重点项目的研究任务；④与在国外留学人员的学术组织建立密切的联系，如在美的留学人员已组织中国留美数学家咨询委员会（这个委员会成员包括田刚、林芳华、胡森等著名青年数学家），天元基金学术领导小组已准备给他们发聘书，今后他们将经常向国内推荐优秀留学人员回国讲学或短期工作，负责国内外学术动态和有关信息的传递和交流，对发展我国数学研究进行咨询提出建议等.

今后，我们要继续积极组织和大力支持留学人员回国的各项学术活动，巩固和发展上述行之有效并深受欢迎的模式，把国外优秀留学人员当作我国数学发展的一支重要的力量. 为促进边缘学科的发展，还应充分重视跨学科的学术交流.

(5) 进一步改善数学研究的条件，加快我国数学研究手段现代化的进程.

“八五”期间，我们在数学界已经率先为部分数学家配备了计算机. 但是，这仅仅是开始，我国数学界使用微机做研究，无论是广度还是深度都还远远不如西方发达国家. “九五”期间我们将从以下三个方面做好这方面的工作. 首先要为更多的数学家配备计算机，争取每个承担基金项目的负责人都能在他的办公室或家

里使用微机；其次要采取有力措施，使有计算机的数学家学会更好地使用机器，提高使用的效率和质量．例如，今年我们同联合国教科文组织下属的《纯粹数学与应用数学中心（CIMPA）》合作将在中山大学举办数学家如何用好微机的讲习班，目的就是帮助数学家掌握更多的使用微机的手段．第三要进一步支持开发 E-mail 电子邮件资源系统，使 E-mail 系统成为每个数学工作者必不可缺的基本工具．

（6）进一步作好图书出版工作．

前已叙述，天元基金已经采取有力措施解决图书期刊不足的问题，今后我们将在以下几个方面作出更大的努力：

加强出版经费的强度，用于购买版权的工作；

进一步扩大优惠卡的发放范围，争取使所有获得科学基金资助的数学家都能得到优惠卡；

进一步开通发行渠道，建立一个全国范围内的图书销售网络；

加强国内数学专著的出版工作，尤其是基金资助下的数学专著和各类讲习班上使用过的优秀讲义、教材将给予优先的资助；

在条件允许的情况下建立一个专门的数学图书出版社，以从根本上解决专家们出书难、买书难的问题．

中国数学正处在一个重要的发展时期．这几年来，中国数学研究的巨大进步和数学界表现出来的团结向上、奋发努力的劲头，都给中国数学的发展带来无限的希望．现在国家自然科学基金中数学经费又有了较大幅度的增加，从而天元基金对项目资助的任务可以减轻，得以充分发挥其使用特色．必将给全国数学界更大的鼓舞和鞭策．我们相信，只要我们更加团结、更加兢兢业业地工作，中国数学事业一定会得到更快的发展，“率先赶上”的宏伟目标一定会实现．

代数数论在中国

丁石孙　　　　　　冯克勤
（北京大学数学系）　（中国科学技术大学数学系）

经典代数数论是研究整体域的代数结构和算术特性. 所谓整体域（Global Field）包括数域（即有理数域 $\boldsymbol{Q}$ 的有限扩域）和函数域（即有限域 $\boldsymbol{F}_q$ 上有理函数域 $\boldsymbol{F}_q(x)$ 的有限扩域）. 近代和现代的代数数论则与代数几何、群表示论、调和分析等许多学科交织在一起，产生出模形式理论，椭圆曲线算术理论，自守表示理论和 Drinfeld 模理论等许多活跃的研究领域.

中国学者在代数数论方面的研究始于本世纪 30—40 年代在国外的年轻学者，曾炯之在哥丁根从师于 E. Noether，对于函数域的代数结构建立了一个重要结果，回国后发表在 1935 年《中国数学杂志》上. 50 年代又被 S. Lang 重新发现，现被称为 Tsen-Lang 定理. 1935 年柯召留学于英国，研究二次域整数环上的二次型算术理论. 40 年代华罗庚在美国工作期间，得到实二次域基本单位的上界估计，是一个著名的经典结果. 华罗庚和闵嗣鹤对于一系列虚二次域研究了欧几里德算式，以判别这些域的整数环是否为欧氏整环. 他们二人还建立了向量值的模形式（现称为 Siegel 模形式）的一般理论. 1946 年王湘浩在普林斯顿大学从师于 E. Artin. 他首先通过反例指出 Grunwald 的一个著名结果的错误（这个结果是研究下面的问题：对于整体域 K 中非零元素 α，如果 α 在 K 的每个局部域中均是 m 次方，在什么情况下 α 为 K 中的 m 次方），进而他给出并证明了这个结果的完备而正确的形式，被后

人称为 Grunwald—王定理，这是代数数论一个经典的重要结果.

1935 年曾炯之回国，辗转各地，于 1940 年因病在西昌去世. 1938 年柯召回到四川，带领朱福祖等人继续从事二次域上二次型的研究. 1948 年王湘浩回到北京大学组织代数数论讨论班，聂灵沼在王湘浩指导下研究函数域的代数结构和局部类域论. 在 50 年代，华罗庚于中国科学院数学研究所组织数论讨论班，讲授代数数论. 在这之后，由于种种原因，代数数论的研究工作在新中国成立初期没有充分开展起来. 1962 年华罗庚招收研究生陆洪文研究四元数体上的模形式，1964 年招收研究生冯克勤学习代数数域上的解析理论. 此期间，华罗庚和王元从事数论在近似计算中的应用的研究. 他们考虑用分圆域中的分圆单位作为高维数值积分的插值点，可以提高精度和减小计算量. 但这一切均由文化大革命而中断.

70 年代初期，在华罗庚、柯召、段学复、万哲先、曾肯成等人的带领下，国内一批代数和数论工作者从事代数编码的理论与实际问题的研究和教学. 基于代数数论是代数编码的重要工具之一，1974 年，万哲先在北京组织代数数论讨论班. 这个讨论班一直延续到 1978 年，相继参加的有王元，聂灵沼，丁石孙，冯绪宁，戴宗铎，刘木兰，陆洪文，冯克勤，朱福祖，李德琅等人，学习代数数论在西方的最新进展. 1978 年北京大学开始招收代数数论专业的研究生，张贤科（中国科技大学）和赵春来（北京大学）是我国培养的第一批代数数论博士生.

1979 年起，在改革开放的形势下，一批 40 岁左右的人相继去欧美学习代数数论的最新成果. 回国后带领年青人开展工作，并在中山大学和南开大学等地举办代数数论的专题讨论班和学术年. 1993 年在南开举行了“算术代数几何”国际讨论会. 从 1982 年以来，国外著名代数数论学家 J. Coates，Fröhlich，Gérardin，Greenberg，Igusa，S. Lang，Shimura，K. Rubin，L. Washington，

D. Zagier 等人和华人数论学者黎景辉、李文卿、于靖等相继来大陆访问和讲学，中国代数数论界与国外建立了密切的学术联系. 代数数论在七五和八五期间均被列为国家重大研究课题，科研工作获得国家自然科学奖两项和陈省身数学奖一项. 十多年来已培养硕士生三十余名和博士生十一名，其中有些已成为教授和付教授，作出了受到国内外注目的一些研究工作. 目前正努力靠拢国际上的主流，赶超世界先进水平. 与此同时，国内派出近二十人在北美、欧洲和日本学习代数数论. 目前已有张寿武、翁林、万大庆等人作出很好的成绩.

近十几年来，中国代数数论学家作了不少有价值的研究成果. 如王元对于代数数域上加性方程的研究工作，陆洪文、张贤科、李德琅、兰以中、赵春来和冯克勤等人关于各种数域和函数域的类群结构，类数特性和分圆单位系的工作，裴定一关于半整权模形式的工作，赵春来、张绍伟和冯克勤关于椭圆曲线的工作，聂灵沼和李德琅关于类域论的工作，朱福祖及其学生与李德琅关于二次型算术理论的工作等，下面就其中的一部分予以简要介绍.

一、半整权的模形式

模形式理论一个基本问题是决定各种模形式向量空间的结构. 对于整数权的模形式向量空间，熟知可分解成 Eisenstein 形式空间和尖点模形式空间的直和. 对于近年来发展的半整权模形式，上述结果是否成立？当权$\geqslant 5/2$时可以与整权情形一样地证明这个结果是对的. 对于权为 1/2 的情形，结果由 Serre 和 Deligne 证明. 1982—1984 年，裴定一证明了剩下的权 3/2 情形，从而最终解决了这个重要问题. 裴定一还明显构作出权 3/2 模形式空间的一组基，并将此结果用于研究三元二次型的整解问题.

1982 年，冯绪宁构作了一批权 1/2 的 Hilbert 模形式. 1993 年，冯绪宁把 theta 函数推广到多元情形，并用此构作了两大类半整权的 Hilbert 模形式.

二、实二次域的高斯类数猜想

高斯的一个著名猜想是说：理想类数为 1 的实二次域有无穷多个. 这个猜想至今未能解决. 陆洪文对于类数为 1 的实二次域作了深入的研究，得到许多优于前人的结果. 他给出实二次域类数为 1 的一些判别条件，现已成为国外学者所使用的基本工具.

设 D 是无平方因子的整数，$D\geqslant 2$. Δ 和 $h(D)$ 分别为实二次域 $\boldsymbol{Q}(\sqrt{D})$ 的判别式和类数. 又令

$$\omega=\begin{cases}\dfrac{1+\sqrt{D}}{2}, & 若\ D\equiv 1\pmod 4\\ \sqrt{D}, & 若\ D\equiv 2,3\pmod 4\end{cases}$$

而 $\omega=[a_0,\overline{a_1,\cdots,a_k}]$ 是 ω 的连分数展开.

定理 1（陆洪文，1979） 以 $\lambda_1(D)$ 和 $\lambda_2(D)$ 分别表示不定方程 $x^2+4yz=\Delta$ 和 $x^2+4y^2=\Delta$ 的非负整解个数，θ 是由 D 和 ω 的连分数展开容易决定的整数($\theta=0$,1 或者 2,具体公式从略),则

$$\sum_{l=1}^{k}a_l+\theta\leqslant\lambda_1(D)+\lambda_2(D).$$

并且等式成立当且仅当 $h(D)=1$.

定理 1 的推论包含了不少前人的工作.

定理 2（陆洪文，1981） 令 $\zeta_K(s)$ 是实二次域 $K=\boldsymbol{Q}(\sqrt{D})$ 的 zeta 函数. 对于 $1\leqslant l\leqslant k$，令

$$[a_l,a_{l+1},\cdots]=\frac{P_l+\sqrt{\Delta}}{2Q_l},\quad P_l,Q_l\in\boldsymbol{Z}$$

则 $h(D)=1$ 当且仅当

$$\zeta_K(-1)=\frac{1}{60}\sum_{l=1}^{k}\left(a_lQ_{l+1}+\frac{a_l(a_l^2+5)}{6}Q_l\right)$$

这个定理也有很多有意义的推论.

此外，陆洪文还给出实二次域和虚二次域类数之间一些奇妙的联系.

三、椭圆曲线的 BSD 猜想

设 E 是有理数域 Q 上一条椭圆曲线，$E(Q)$ 是 E 的有理点全体，这是有限生成 Abel 群. 又设 $L_E(s)$ 是椭圆曲线 E 的 L-函数. 所谓 Birch 和 Swinnerton-Dyer 猜想是说群 $E(Q)$ 的算术特性和函数 $L_E(s)$ 的解析特性有密切联系. 确切些说，BSD 猜想为

(1) 群 $E(Q)$的秩 $r(E)$等于函数 $L_E(s)$在 $s=1$ 处零点的阶 $R(E)$.

(2) 如果 $r(E)=0$，则

$$\frac{|E(Q)|^2}{C_E}L_E(1)=|\text{Ш}(E)| \qquad (*)$$

其中 $\text{Ш}(E)$ 是 E 的 Tate-Shafarevich 群，C_E 是与 E 有关的一个容易计算的实数（包括 E 的实周期和玉河数）.

1989 年，K. Rubin 对于有复乘的椭圆曲线 E，证明了（*）式两边均为正整数，并且它们的奇数部分相等（对于有复乘 $\sqrt{-3}$的曲线 E，（*）式两边的 3-部分未能证明）. 1988—1990 年，冯克勤对于一系列具有复乘 $\sqrt{-1}$，$\sqrt{-3}$和 $\sqrt{-7}$的椭圆曲线 E，证明了 $r(E)=R(E)=0$，并且（*）式两边的偶数部分也相等（当复乘为 $\sqrt{-3}$时，（*）式两边的 3-部分也相等）. 从而整个 BSD 猜想对于这些曲线都是正确的. 1993 年，张绍伟采用虚二次域上的 Iwasawa 理论，对于一批具有复乘 $\sqrt{-3}$的椭圆曲线证明了（*）式两边的 3-部分相等.

与具有复乘 $\sqrt{-1}$的椭圆曲线

$$E_n: y^2=x^3-nx$$

密切相关的有一个古老的数学问题：同余数问题. 正整数 n（不妨设它无平方因子）叫作同余数（Congruent number），是指它是某个边长均为有理数的直角三角形的面积. 同余数问题即是决定出全部同余数来，这个问题已有近千年的历史，至今未完全解决. 一个著名的 ACK 猜想为：若 $n\equiv 5, 6, 7 \pmod 8$，则 n 必为同余数. 这个问题与椭圆曲线 E_n 的联系为：(1) n 为同余数当且仅当

群 $E_n(Q)$ 的秩 $\geqslant 1$(即群 $E_n(Q)$ 有无限阶元素)；(2) 若 BSD 猜想对于 E_n 成立，则上述 ACK 猜想成立.

迄今为止，已经决定的同余数和非同余数，其奇素因子的个数均不超过 3. 冯克勤（1993）决定了一批非同余数 n，它们的奇素因子个数可以是任意正整数. 证明是用 2-descent 方法计算出群 $E_n(Q)$的秩为 0. 这类非同余数 n 用图论的语言来刻划. 一个连通无向图 G 叫作奇性的，是指 G 的 Spanning tree 的个数为奇数. 对于 $n=p_1\cdots p_l$（其中 p_1，$\cdots p_l$ 为不同的奇素数），我们如下定义一个图 G（n)：顶点集合为 $\{p_1, \cdots, p_l\}$. 从顶点 p_i 到 p_j 有弧当且仅当$\left(\frac{p_i}{p_j}\right)=-1$. 如果 p_1，$\cdots p_l$ 至多有一个模 4 同余 3，则$G(n)$是无向图.

定理（冯克勤 1993）设 $l\geqslant 1$，p_1，$\cdots$，p_l 是不同的奇素数.

(1) 若 $n=p_1\cdots p_l$，其中 $p_1\equiv 3 \pmod 8$，$p_2\equiv\cdots\equiv p_l\equiv 1 \pmod 8$，并且$G(n)$是奇性图，则 n 为非同余数；

(2) 若 $n=2p_1\cdots p_l$，其中 $p_1\equiv 5 \pmod 8$，$p_2\equiv\cdots\equiv p_l\equiv 1 \pmod 8$，并且 $G(n/2)$ 是奇性图，则 n 为非同余数.

此外，对于上述 n 若 $l\leqslant 3$，则 BSD 猜想对于椭圆曲线 E_n 成立.

四、分圆单位群

设 $\zeta_n=e^{\frac{2\pi i}{n}}$，$Z[\zeta_n]$ 是分圆数域 $Q(\zeta_n)$ 的整数环. 熟知环 $Z[\zeta_n]$ 的单位群 U_n 秩为 $\frac{\varphi(n)}{2}-1$(其中 $\varphi(n)$ 是欧拉函数). 寻求 U_n 的一组基(基本单位系)是一个重要的问题，但是非常困难. 另一方面，U_n 中存在 $\frac{\varphi(n)}{2}-1$ 个分圆单位 $(1-\zeta_n^a)/(1-\zeta_n)$ $\left(2\leqslant a\leqslant\frac{n}{2},\ (a, n)=1\right)$. 以 C_n 表示由它们生成的群(分圆单位群). 早在上个世纪，Kummer 和 Hilbert 就发现，当 $n=p^l$ 时，上

述$\frac{\varphi(n)}{2}-1$个分圆单位是独立的，即 $[U_n : C_n]$ 有限. 否则，它们可能不独立. 在华罗庚和王元的指导下，1978 年裴定一和冯克勤决定出使这些分圆单位独立的全部 n 值. 1982 年冯克勤又把结果推广到任意 Abel 数域中，并且给出计算分圆单位群 C_n 秩的公式. 1988—1990 年冯克勤及其学生程露、印林生对于分圆函数域及其子域的分圆单位系证明出类似的结果. 1993 年，徐飞和冯克勤利用分圆单位系构作了一种 Euler system，从而仿照 Kolyvagin 和 Rubin 的方法，证明出关于分圆函数域类群的如下结果

定理（徐飞，冯克勤 1993）设 $k=F_q(T)$，$K=k(\Lambda_M)$为分圆函数域，K^+是 K 的极大实子域. l 是素数满足 $(l, q\Phi(M))=1$. U 和 E 分别为 K^+的单位群和分圆单位群的 l-部分，C 是 K^+的理想类群的 l-部分. 则对伽罗华群 Gal (K^+/k) 的每个 l-adic 特征 χ，$|C(\chi)| = |U/E(\chi)|$.

1994 年，赵健强和徐飞利用 D. Hayes 的椭圆单位，并藉助于 Tate 证明的函数域上 Stark 猜想，把上述结果极大地推广到任意函数域上. 他们的结果相当于证明了函数域上的 Gras 猜想.

矩阵几何

万哲先
(中国科学院系统科学研究所)

§1 引　言

矩阵几何是我国数学家华罗庚于本世纪 40 年代中期所开创的一个数学研究领域[5—10]. 他是由于研究多元复变函数论的需要而研究的，因而他开始探讨的是复数域上的四类矩阵几何，即长方阵几何、对称阵几何、斜对称阵几何和 Hermite 阵几何. 1949 年，他[11]把他关于复数域上对称阵几何的结果推广到特征$\neq 2$ 的任意域上；1951 年他[12]又把他关于复数域上长方阵几何的结果推广到$\neq \boldsymbol{F}_2$ 的特征任意的除环上，并研究了矩阵几何对代数和几何的应用. 华罗庚所开创的矩阵几何的研究由我国数学家所继承[23,17,15,16,18—22]. 近年来，矩阵几何又被应用到图论中去[1,13—21].

为了说明矩阵几何的问题，最好先介绍一下 Felix Klein 于 1872 年提出的 Erlangen 纲领. 它说："一门几何就是一些图形在某个由非奇异线性变换组成的群下不变的性质的集合". 在 Erlangen 纲领中，Klein 指出了几何、群以及不变量的密切联系. 这个纲领成为此后几何学研究的指导性纲领之一. 这样，几何学的一个基本问题就是研究用尽可能少的不变量来刻划这个几何的变换

群，这个基本问题的答案通常称为这个几何的基本定理.

在矩阵几何里，空间的点是某一类矩阵，例如同样大小的长方阵、对称阵或斜对称阵，还有一个变换群作用在这个空间上. 以长方阵几何为例：设 D 是除环，m 和 n 都是$\geqslant 2$ 的整数，长方阵几何的空间由 D 上所有 $m\times n$ 矩阵组成，记作 $\mathscr{M}_{m\times n}(D)$. $\mathscr{M}_{m\times n}(D)$ 中的元素称为空间中的点. $\mathscr{M}_{m\times n}(D)$ 中所有以下形状的变换

$$\begin{aligned}&\mathscr{M}_{m\times n}(D)\to\mathscr{M}_{m\times n}(D),\\&X\mapsto PZQ+R,\end{aligned}\tag{1}$$

其中 $P\in GL_m(D)$，$Q\in GL_n(D)$，而 $R\in\mathscr{M}_{m\times n}(D)$，就组成空间 $\mathscr{M}_{m\times n}(D)$的一个变换群，将它记作 $G_{m\times n}(D)$. 那么 D 上的长方阵几何就是研究 $\mathscr{M}_{m\times n}(D)$的图形（即子集）在 $G_{m\times n}(D)$作用下不变的性质. 例如，对任意两个 $m\times n$ 矩阵 X_1 和 X_2 组成的图形，rank (X_1-X_2) 就是在群 $G_{m\times n}(D)$ 作用下的不变量. 如果 rank$(X_1-X_2)=1$，就说 X_1 和 X_2 粘切. 华罗庚证明，粘切这个不变量就"基本上"刻划了 $\mathscr{M}_{m\times n}(D)$的变换群 $G_{m\times n}(D)$，即从 $\mathscr{M}_{m\times n}(D)$到它自身的保粘切的双射"基本上"是变换群 $G_{m\times n}(D)$ 中的元素. 在下一节里我们将阐明"基本上"的涵义.

§2 长方阵几何

下面这个定理定出了从 $\mathscr{M}_{m\times n}(D)$ 到它自身的保粘切的双射的具体形状.

长方阵几何的基本定理 设 D 是除环，m 和 n 都是$\geqslant 2$ 的整数，$\mathscr{A}$ 是从 $\mathscr{A}_{m\times n}(D)$ 到它自身之上的双射，假定 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{A}^{-1}$都保粘切，即对任意 $\mathscr{X}_1$，$\mathscr{X}_2\in\mathscr{M}_{m\times n}(D)$，$X_1$ 和 X_2 粘切当且仅当 $\mathscr{A}(X_1)$ 和 $\mathscr{A}(X_2)$ 粘切. 那么当 $m\neq n$ 时，$\mathscr{A}$ 必为以下形状

的变换：

$$\mathscr{A}(X) = PX^{\sigma}Q + R, \quad 对所有 X \in \mathscr{M}_{m\times n}(D), \quad (1)$$

其中$P \in GL_m(D)$，$Q \in GL_n(D)$，$\mathscr{R} \in \mathscr{M}_{m\times n}(D)$，$\sigma$是$D$的一个自同构，$X^{\sigma}$表示把$\sigma$作用到$X$的所有元素上得到的矩阵. 当$m=n$时，除了$\mathscr{A}$可能是形如（1）的变换之外，$\mathscr{A}$还可能是以下形状的变换.

$$\mathscr{A}(X) = P^{\tau}({}^{t}X^{\tau})Q + R, \quad 对所有的 X \in \mathscr{M}_{m\times n}(D), \quad (2)$$

其中P，Q，R的意义同上，τ是D的一个反自同构，X^{τ}表示把τ作用到X的所有元素上得到的矩阵，${}^{t}(X^{\tau})$表示矩阵X^{τ}的转置. 反之，映射（1）和（2）均为双射，它们和它们的逆均保粘切.

这个定理，当$D \neq F_2$时，是华罗庚[12]在1951年证明的，而$D=F_2$的情形则是万哲先和王仰贤[23]在1962年补证的. 华罗庚证明这个定理的关键是引进了**极大集**的概念. 两点粘切就是图论中的两个顶点有边相连，而极大集就恰好是二十年后图论中出现的极大完全子图这一概念. 因此保粘切的双射$\mathscr{A}$一定把极大集映成极大集. 他证明这个定理的步骤是：先确定极大集在变换群$G_{m\times n}(D)$之下的标准形；利用极大集的标准形来研究两个极大集的交集，从而证明了保粘切的双射$\mathscr{A}$诱导出从一个极大集到它的像集（也是个极大集）上的一个仿射变换；再利用仿射几何的基本定理，使$\mathscr{A}$承受一个形如（1）的变换或形如（2）的变换（后一情形只在$m=n$时才会发生）之后，可设$\mathscr{A}$把某一个极大集中的点都保持不动；最后再利用“传染法”证明$\mathscr{A}$把$\mathscr{M}_{m\times n}(D)$中每个点都保持不动；这样就完成了这个定理的证明.

在［12］中，华罗庚还利用长方阵几何的基本定理，确定了任意除环D上的全阵环$\mathscr{M}_n(D)(n \geqslant 2)$的自同构、半自同构、Jordan自同构（这要假定$D$的特征$\neq 2$），和Lie自同构（这要假定$D$的特征$\neq 2$和3）；他还推出了除环$D$上长方阵射影几何（即$D$上

的 Grassmann 流形）的基本定理（详细证明见［17］）．当 D 是域时，Grassmann 流形的基本定理是周炜良[2]在 1949 年证明的．1965 年邓诗涛和李乔[3]则利用域上 Grassmann 流形的基本定理推出了域上长方阵几何基本定理．

我们再把 $\mathscr{M}_{m\times n}(D)$ 中的点叫做顶点，并规定两个顶点有边相连，如果它们粘切，那么就得到一个图．把这个图记作 $\Gamma(M_{m\times n}(D))$，它是个距离可迁图．自然可以把长方阵几何的基本定理解释成图 $\Gamma(M_{m\times n}(D))$ 的一个图自同构的定理[1]．

§3 交错矩阵几何

在这一节里假定 F 是域，n 是 $\geqslant 2$ 的整数．设 A 是 F 上的 $n\times n$ 矩阵，如果 ${}^tA=-A$ 而且 A 的主对角线上的元素都等于 0，A 就叫做 F 上的 $n\times n$ **交错矩阵**．熟知，交错矩阵的秩一定是偶数．用 $\mathscr{K}_n(F)$ 表示 F 上所有 $n\times n$ 交错矩阵的集合，把它叫做 F 上 $n\times n$ 交错矩阵几何的空间，其中的元素叫做空间中的点．$\mathscr{K}_n(F)$ 中所有以下形状的变换

$$\mathscr{K}_n(F) \rightarrow \mathscr{K}_n(F),$$
$$X \mapsto {}^tPXP+K,$$

其中 $P\in GL_n(F)$，$K\in\mathscr{K}_n(F)$，组成 $\mathscr{K}_n(F)$ 的一个变换群，记作 $GK_n(F)$．设 $X_1, X_2\in\mathscr{K}_n(F)$，如果 $\operatorname{rank}(X_1-X_2)=2$，就说 X_1 和 X_2 粘切．显然 $\mathscr{K}_n(F)$ 中两点粘切是在 $GK_n(F)$ 作用下的不变量，反过来，我们有

交错矩阵几何的基本定理　设 F 是域，其特征任意，n 是 $\geqslant 4$ 的整数，$\mathscr{A}$ 是从 $\mathscr{K}_n(F)$ 到它自身之上的双射．假定 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{A}^{-1}$ 都保粘切，那么当 $n>4$ 时，$\mathscr{A}$ 必为以下形状的变换

$$\mathscr{A}(X) = a{}^tPX^{\sigma}P + K, \quad 对所有的\ X \in \mathscr{K}_n(F), \tag{3}$$

其中 $a \in F^*$，$P \in GL_n(F)$，$K \in \mathscr{K}_n(F)$，σ 是 F 的一个自同构. 当 $n=4$ 时，$\mathscr{A}$ 必为以下形状的变换

$$\mathscr{A}(X) = a{}^tP(X^*)^{\sigma}P + K, \quad 对所有的\ X \in \mathscr{K}_n(F), \tag{4}$$

其中 a，P，K，σ 的意义同上，而 $X \to X^*$ 或为恒同映射（即 $X^* = X$ 对所有的 $X \in \mathscr{K}_n(F)$）或为以下映射

$$\begin{bmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ -x_{12} & 0 & x_{23} & x_{24} \\ -x_{13} & -x_{23} & 0 & x_{34} \\ -x_{14} & -x_{24} & -x_{34} & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} & x_{23} \\ -x_{12} & 0 & x_{14} & x_{24} \\ -x_{13} & -x_{14} & 0 & x_{34} \\ -x_{23} & -x_{24} & -x_{34} & 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

反之，映射(3)和(4)均为双射，它们和它们的逆均保粘切.

这个定理是 1966 年刘木兰[16]证明的，她的证明也依赖极大集的概念. 当 $F=C$ 而 $\mathscr{A}$ 还适合另一些条件时，它是 1945 年华罗庚[5]证明的.

自然此定理也有代数应用和几何应用（见 [16，22]），也可以解释成一条图自同构的定理[1].

§4 对称矩阵几何

在这一节里仍假定 F 是域，n 是 $\geqslant 2$ 的整数. 设 A 是 F 上的 $n \times n$ 矩阵. 如果 ${}^tA = A$，就把 A 叫做 F 上的 $n \times n$ **对称矩阵**. 用 $\mathscr{S}_n(F)$ 表 F 上所有 $n \times n$ 对称矩阵的集合，把它叫做 F 上 $n \times n$ 对称矩阵几何的空间，其中的元素叫做空间中的点. $\mathscr{S}_n(F)$ 中所有以下形状的变换

$$\mathscr{S}_n(F) \to \mathscr{S}_n(F),$$

$$X \mapsto {}^tPXP+S,$$

其中 $P \in GL_n(F)$, $S \in \mathscr{S}_n(F)$，组成 $\mathscr{S}_n(F)$ 的一个变换群，记作 $GS_n(F)$．设 X_1, $X_2 \in \mathscr{S}_n(F)$，如果 $\operatorname{rank}(X_1 - X_2) = 1$，就说 X_1 和 X_2 粘切．显然 $\mathscr{S}_n(F)$ 中两点粘切是在 $GS_n(F)$ 作用下的不变量．反过来，有

对称矩阵几何的基本定理　设 F 是域，其特征任意，n 是 $\geqslant 2$ 的整数；当 F 的特征 $=2$ 而 $F \neq \boldsymbol{F}_2$ 时，还假定 $n \geqslant 3$．设 $\mathscr{A}$ 是从 $\mathscr{S}_n(F)$ 到它自身之上的双射，并假定 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{A}^{-1}$ 都保粘切．那么除开 $n=3$ 而 $F=\boldsymbol{F}_2$ 这一情形之外，$\mathscr{A}$ 必为以下形状的变换

$$\mathscr{A}(X) = a\,{}^tPX^\sigma P + S, \quad \text{对所有 } X \in \mathscr{S}_n(F), \tag{6}$$

其中 $a \in F^*$，$P \in GL_n(F)$，$S \in \mathscr{S}_n(F)$，σ 是 F 的一个自同构．当 $n=3$ 而 $F=\boldsymbol{F}_2$ 时，$\mathscr{S}_3(\boldsymbol{F}_2)$ 还有另外一个保粘切的双射

$$\left.\begin{array}{l}
\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{12} & x_{22} & 0 \\ x_{13} & 0 & x_{33} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{12} & x_{22} & 0 \\ x_{13} & 0 & x_{33} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{12} & x_{22} & 1 \\ x_{13} & 1 & x_{33} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_{11}+1 & x_{12}+1 & x_{13}+1 \\ x_{12}+1 & x_{22} & 1 \\ x_{13}+1 & 1 & x_{33} \end{bmatrix}
\end{array}\right\} \text{对所有 } x_{11},\ x_{12},$$

$$x_{13},\ x_{22},\ x_{33} \in F, \tag{7}$$

而 $\mathscr{A}$ 是形如 (6) 的一些双射和这个双射 (7) 之积．反之，映射 (6)和(7)都是双射，它们和它们的逆均保粘切．

这个定理当 $F=C$ 而 $\mathscr{A}$ 适合另一些条件时，是 1945 年华罗庚[5]证明的．1947 年他[9,10]用构作对合的方法减弱了条件．1949 年他[11]又把这个定理推广到特征 $\neq 2$ 的域上，用的仍是构作对合的方法；但在他的证明中有几处跳步，本文作者未能补出．1994 年本文作者[18,19]对 F 的特征不加限制，证明了上述定理．证明中除了极大集（作者称之为秩 1 极大集）之外，还引进了秩 2 极大集．$n=2$，F 的特征 $=2$，而 $F \neq \boldsymbol{F}_2$ 的情形，还没有解决．

当 F 的特征$\neq 2$ 时，利用这个定理可以确定由 F 上 $n\times n$ 对称矩阵组成的 Jordan 环的自同构（见 [18]）. 当 F 的特征任意时，也可以从这个定理推出周炜良[2]的 C_n 型对偶配极空间的基本定理（见 [15，22]）.

我们再把 $\mathscr{S}_n(F)$ 中的点叫做顶点. 如果两个顶点粘切，就说它们有边相连. 这样就得到一个图，记作 $\Gamma(\mathscr{S}_n(F))$. 自然可以把对称阵几何的基本定理解释成关于图 $\Gamma(\mathscr{S}_n(F))$ 的图自同构的一条定理.

有趣的是，除了 $\Gamma(\mathscr{S}_3(\boldsymbol{F}_2))$ 之外，当 F 的特征$\neq 2$ 而 $n\geqslant 2$ 时，以及当 F 的特征$=2$ 而 $n\geqslant 3$ 时，$\Gamma(\mathscr{S}_n(F))$ 都不是距离可迁图. 本文作者[20]证明了 $\Gamma(\mathscr{S}_3(\boldsymbol{F}_2))$ 是距离可迁图，因而也是距离正则图，并且证明了它与折叠 7 方体图同构.

当 F 的特征$\neq 2$ 时，设 X_1，$X_2\in\mathscr{S}_n(F)$ ，如果 rank $(X_1-X_2)=1$ 或 2 ，就规定 X_1 和 X_2 有边相连. 这样得到的图记作 $\Gamma^*(\mathscr{S}_n(F))$. 利用对称矩阵几何的基本定理也可以推出图 $\Gamma^*(\mathscr{S}_n(F))$ 的图自同构必可表成形状 (6) 的变换. 当 $F=\boldsymbol{F}_q$ 时，图 $\Gamma^*(\mathscr{S}_n(\boldsymbol{F}_q))$ 是 Egawa[4]定义的，他证明了 $\Gamma^*(\mathscr{S}_n(\boldsymbol{F}_q))$ 是距离正则图并计算了它的参数.

§5 Hamilton 阵几何学

设 D 是有对合的除环. 把 D 的对合记作$-$，即

$$-: D\to D,$$

$$a\mapsto \bar{a},$$

它是 D 的双射且满足以下条件：对任意 a，$b\in D$，有

$$\overline{a+b}=\bar{a}+\bar{b},$$

$$\overline{ab}=\bar{b}\,\bar{a},$$

和 $\quad \bar{\bar{a}}=a,$

令 $F=\{a\in D\mid \bar{a}=a\}$,

定义**迹映射**

$$T_r:\ D\to F,$$
$$a\mapsto a+\bar{a}$$

和**范映射**

$$N:\ D\to F,$$
$$a\mapsto a\bar{a}.$$

我们作以下假设

假设 I　F 是 D 的真子域并且含在 D 的中心之中.

假设 II　迹映射 T_r 是满射.

注意，假设 I 除开了 D 是域而一是恒同映射这个情形.

设 n 是$\geqslant 2$ 的整数，设 H 是 D 上的 $n\times n$ 矩阵，用 $\overline{H}$ 表示把对合一作用到 H 的所有元素上得到的矩阵，如果${}^t\overline{H}=H$，就把 H 叫做 D 上的 $n\times n$ Hamilton 矩阵. 用 $\mathscr{H}_n(D)$表 D 上所有 $n\times n$ Hamilton 矩阵的集合，把它叫做 D 上 $n\times n$ Hamilton 矩阵几何的空间，其中的元素叫做空间中的点. $\mathscr{H}_n(D)$ 中所有以下形状的变换

$$\mathscr{H}_n(D)\to\mathscr{H}_n(D),$$
$$X\mapsto{}^t\overline{P}XP+H,$$

其中 $P\in GL_n(D)$，$H\in\mathscr{H}_n(D)$，组成 $\mathscr{H}_n(D)$ 的一个变换群，记作 $GH_n(D)$. 设 X_1，$X_2\in\mathscr{H}_n(D)$ ，如果 $\mathrm{rank}\,(X_1-X_2)=1$ ，就说 X_1 和 X_2 **粘切**. 显然 $\mathscr{H}_n(D)$ 中两点粘切是在 $GH_n(F)$ 作用下的不变量. 反过来，有

Hamilton 矩阵几何的基本定理　设 D 是有对合一的除环并假定假设 I 和假设 II 成立. 设 n 是$\geqslant 2$ 的整数；当 $n=2$ 时，还假定 D 是域. 再设 $\mathscr{A}$ 是从 $\mathscr{H}_n(D)$ 到它自身之上的双射，并假定 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{A}^{-1}$都保粘切. 那么 $\mathscr{A}$ 一定是以下形状的变换

$$\mathscr{A}(X)=a{}^t\overline{P}X^{\sigma}P+H\qquad \text{对所有的 } X\in\mathscr{H}_n(D),\tag{8}$$

其中$a\in F^*$，$P\in GL_n(\mathscr{D})$，$H\in\mathscr{H}_n(D)$，σ是D的一个自同构并有性质$\bar{a}^\sigma=\overline{a^\sigma}$对所有的$a\in D$. 当范映射是满射时，(8) 中的$a$可以略去. 反之，映射 (8) 是双射，它和它的逆均保粘切.

这个定理是本文作者[21]最近证明的，证明中除了依赖秩1极大集和秩2极大集之外，还引进了约化秩2极大集的概念. 当$n=2$，D是除环而不是域的情形，还有待进一步研究. 当$D=C$而$\mathscr{A}$还适合另一些条件时，这个定理是1945年华罗庚[5]首先证明的. 当$D=F_q$时，它是1991年由Ivanov和Shpectorov[14]证明的.

自然这个定理也有代数应用（见[21]）和几何应用（见[22]），也可以解释成一条图自同构的定理（见[21]）.

§6 结 束 语

华罗庚教授在1951年到1983年长达三十二年的时间里担任中国数学会理事长，从1951年到1985年长达三十四年的时间里担任中国科学院数学研究所所长. 他亲自开拓了许多数学领域，也倡导开拓了许多领域. 本文仅就他所开创的矩阵几何这一领域作一简要的介绍，试图说明：尽管他离开我们已经整整十年，他刻苦钻研的精神仍然是我们的表率，鼓舞着我们前进，而他的重大数学成就仍然影响着今天数学的发展.

参 考 资 料

[1] A. E. Brouwer, A. M. Cohen and A. Neumaier, *Distance-regular Graphs*, Springer-Verlag, 1989.

[2] W. L. Chow, On the geometry of algebraic homogeneous spaces, *Annals of Math.* (2), 50 (1949)), 32—67.

[3] S. Deng and Q. Li, On the affine geometry of algebraic homogeneous spaces, *Acta Mathematicae Sinica* 15 (1965), 651—663 (in Chinese). English translation: *Chinese Mathematics* 7 (1965), 387—391.

[4] Y. Egawa, Association schemes of quadratic forms, *J. Combin. Theory*, (A), 38 (1985), 1—14.

[5] L. K. Hua, Geometries of matrices I. Generalizations of von Staudt's theorem, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 57 (1945), 441—481.

[6] L. K. Hua. Geometries of matrices I_1. Arithmetical construction, *Trans. Amer. Math. Soc.* 57 (1945), 482—490.

[7] L. K. Hua, Geometries of symmetric matrices over the real field I. *Dokl, Akad. Nauk. SSSR (N. S)*. 53 (1946), 95—97.

[8] L. K. Hua, Geometrices of symmetric matrices over the real field II. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR (N. S.)*, 53 (1946), 195—196.

[9] L. K. Hua, Geometries of matrices II. Study of involutions in the geometry of symmetric matrices, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 61 (1947), 193—228.

[10] L. K. Hua, Geometries of matrices Ⅲ. Fundamental theorems in the geometries of symmetric matrices, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 61 (1947), 229—255.

[11] L. K. Hua, Geometry of symmetric matrices over any field with characteristic other than two, *Ann. of Math.*, 50 (1949), 8—31.

[12] L. K. Hua, A theorem on matrices over a sfield and its applications, *Acta Math. Sinica*, 1 (1951), 109—163.

[13] L. K. Hua and Z. Wan, *Classical Groups*, Shanghai Science and Technology Press, Shanghai, 1963 (in Chinese).

[14] A. A. Ivanov and S. V. Shpectorov, A characterization of the association schemes of Hermitian forms, *J. Math. Soc. Japan*, 43 (1991), 25—48.

[15] Mulan Liu, A proof of the fundamental theorem of projective geometry of symmetric matrices, *Shuxue Jinzhan* 8 (1965), 283—292 (in Chinese).

[16] Mulan Liu, Geometry of alternate matrices, *Acta Math. Sinica*, 16 (1966), 104—135 (in Chinese). English translation: *Chinese Mathematics*, 8 (1966), 108—143.

[17] Dingyi Pei, A proof of the fundamental theorem of the projective geometry of rectangular matrices, *A collection of Papers Celebrating the Fifth Anniversary of the Chinese University of Science and Technology*, 99—110 (in Chinese).

[18] Z. Wan, Geometry of symmetric matrices and its applications I, *Algebra Colloquium*, 1 (1994), 97—120.

[19] Z. Wan, Geometry of symmetric matrices and its applications II, *Algebra Colloquium*, 1 (1994), 201—224.

[20] Z. Wan, The graph of 3×3 binary symmetric matrices, to appear in Journal of Northeastern Mathematics.

[21] Z. Wan, Geometry of Hamiltonian matrices and its applications, in preparation.

[22] Z. Wan, *Geometry of Matrices*, in preparation.

[23] Z. Wan and Y. Wang, Discussion on "A theorem on matrices over a sfield and its applications", *Shuxue Jinzhan*, 5 (1962), 325—332 (in Chinese).

中国学者在随机分析领域的若干成果

马志明
（中国科学院应用数学研究所）

随机分析在理论上是基础数学的一个分支，同时它本身又在众多的学科领域中有广泛的应用. 40—50 年代初日本数学家伊藤清（K. Itô）建立了基于 Brown 运动的随机积分和微分规则，并建立了随机微分方程理论. 1987 年伊藤清获 Wolf 数学奖时，他的随机分析被誉为“随机王国中的牛顿定律”. 到 70 年代，伊藤的随机微积分发展成为半鞅的随机分析，并出现了 Malliavin 算法，狄氏型、大偏差理论、无穷维随机分析与随机微分几何，白噪声分析等新的研究领域和交叉学科.

正值国际上随机分析学科迅速发展的时期，我国从 70 年代中期及尔后陆续派出一批中青年学者到国外学习随机分析，形成了一批目前活跃于随机分析领域的海内外华裔中青年科学家. 与此同时，国内概率界从 70 年末至 80 年代初连续组织几次暑期讨论班，留法归来的严加安在国内出版了反映当时国际学术水平的专著“鞅与随机积分引论”，84 年至 85 年中国科学院应用数学所办了一个面向全国的随机分析研究生班. 这些学术活动促进了中国随机分析领域的发展和该领域中青年人材的成长.

本文仅就笔者所知中国学者在随机分析领域中的倒向随机微分方程、鞅与随机积分理论，狄氏型理论三个方向的若干研究成果作一简单介绍（对于笔者所熟悉的狄氏型理论着墨稍多）. 中国

学者在随机分析领域的成果当然不止于这篇短文所介绍.例如,在拟必然分析,大偏差理论,白噪声分析,随机微分几何,薛定谔方程的概率解法等研究方向中国学者都有引人注目的贡献.笔者学识浅薄,挂一漏万之处在所难免.建议读者同时阅读分别由严士健、陈希孺两位教授撰写的文章以了解概率统计这门学科在中国的发展全貌.

§1 倒向随机微分方程及其应用

倒向随机微分方程的概念由彭实戈在与 E. Pardoux 的合作研究中首次提出,是随机分析领域的一个新兴研究方向.彭在与 Pardoux 合作的文章[1]中获得如下一般结果.

倒向随机微分方程的存在唯一性定理(1990) 设 $(W_t)_{t\geqslant 0}$ 是概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的 d-维 Brown 运动,$\mathscr{F}_t=\sigma\{W_s: s\leqslant t\}$,$T>0$. 给定映射 $f=f(w,t,y,z):\Omega\times[0,T]\times \boldsymbol{R}^m\times \boldsymbol{R}^{m\times d}\to \boldsymbol{R}^m$,设对任意 $(y,z)\in \boldsymbol{R}^m\times \boldsymbol{R}^{m\times d}$,$f(\cdot,y,z)$ 是 $\boldsymbol{R}^m$ 值 $(\mathscr{F}_t)$-适应过程且 $\int_0^T|f(s,0,0)|ds\in L^2(\Omega,P)$. 假设 f 关于 (y, z) 满足 Lipschitz 条件,即对所有 $y, y'\in \boldsymbol{R}^m$,$z, z'\in \boldsymbol{R}^{m\times d}$,有

$$|f(\cdot,y,z)-f(\cdot,y',z')|\leqslant C(|y-y'|^2+|z-z'|^2),$$

(C 为固定常数),则对任一 $\mathscr{F}_T$-可测的 $\boldsymbol{R}^m$ 值平方可积随机变量 ξ,存在唯一的一对 $(\mathscr{F}_t)$-适应平方可积随机过程 $(Y_S, Z_S)_{0\leqslant S\leqslant T}$ 满足如下倒向随机微分方程:

$$\begin{cases}-dY_t=f(Y_tZ_t)dt-Z_tdW_t,\\ Y_T=\xi.\end{cases}\tag{1}$$

注:(i) 倒向随机微分方程问题的提出可以追溯到 Bismut 在 1973 年研究随机最优控制时提出的共轭方程,其中隐含 $f=(y,$

z）为线性这一特殊情形的倒向随机微分方程问题.

(ii) D. Duffie 和 L. Epstein 在 $f=f(y)$ 的特殊情形也独立地获得倒向随机微分方程的存在唯一性.

下述结果是倒向随机微分方程的一个重要应用.

非线性 Feynrnan-Kac 公式 (1991)　设 $f(s,x,y,z):[0,T]\times \boldsymbol{R}^n\times \boldsymbol{R}\times \boldsymbol{R}^d\rightarrow \boldsymbol{R}$, $\Phi(x):R^n\rightarrow R$ 都是给定的连续函数，且 f 关于 (x,y,z)，Φ 关于 x 都满足一致 Lipsohitz 条件. 考虑如下二阶拟线性偏微分方程：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+\mathscr{L}u+f(t,r,u,\sigma^T\cdot Du)=0,\\ u(x,T)=\Phi,\end{cases}\tag{2}$$

其中 $\mathscr{L}u=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i,j=1}^{n}(\sigma\sigma^{T})_{ij}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial y_j}+\sum\limits_{i=1}^{n}b_i(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, D 为梯度算子. 如果 $\sigma(s,x)$：$[0,T]\times \boldsymbol{R}^n\rightarrow \boldsymbol{R}^{n\times d}$，$b(s,x)$：$[0,T]\times \boldsymbol{R}^n\rightarrow \boldsymbol{R}^n$ 都是连续映射，且关于 x 都满足 Lipschitz 条件，则偏微分方程 (2) 在 $[0,T]\times \boldsymbol{R}^n$ 上存在唯一的粘性解 (Viscosity solution). 此解可以有如下的概率表示（即非线性 Feynman-Kac 公式）

$$u(t,x)=Y_s^{x,t}|s=t,\tag{3}$$

其中 $(Y^{x,t})_{t\leq s\leq T}$ 是如下倒向随机微分方程的解

$$\begin{cases}-dY_s^{x,t}=f(s,X_s^{x,t},Y_s^{x,t},Z_s^{x,t})ds-Z_s^{x,t}dW_s,\\ Y_T^{x,t}=\Phi(X_T^{x,t}).\end{cases}$$

上面方程中的 $(X_s^{x,t})_{t\leq s\leq T}$ 是满足如下正向随机微分方程的扩散过程.

$$\begin{cases}dX_s^{x,t}=b(s,X_s^{x,t})ds+\sigma(s,X_s^{x,t})dW_s,\\ X_t^{x,t}=x.\end{cases}$$

注：当 b，σ，Φ，f 都为确定性函数时，由 (3) 式给出的 $u(t,x)$ 是一个确定性函数. 在 $f=a(t,x)y+f_0(t,x)$ 的特殊情形，(3) 式就是著名的 Feynman-Kac 公式.

上述结果的思想首先由彭在 [2] 中提出并利用偏微分方程对

σ-非退化的情况给出了证明. 其中 u 可以是 m-维的，因而可以是拟线性方程组. 接着彭在 [3] 中对方程 (2) 的存在唯一性给出了纯概率的证明([3]中的结果实际上更一般，是全非线性方程.)此后彭又与 Pardoux 合作证明了当系数为光滑时方程 (2) 有 $C^{2,1}$ 解 (见 [4]).

倒向随机微分方程提出后不久就被应用于计量经济学和最近刚发展起来的金融数学. 它非常适于解决在不确定的环境中如何实现将来的一个既定目标 (或目的) 的问题. 典型的例子就是期权定价问题. 另一个应用前景是非线性偏微分方程的随机计算方法 (如 Navier-Stokes 方程的计算).

E. Pardoux 在 94 年世界数学家大会上作了题为"倒向随机微分方程及其应用" 的 45 分钟邀请报告.

§2 对鞅与随机积分理论的贡献

鞅与随机积分理论是 Itô 随机分析的精髓. 这一理论是以 P. A. Meyer 为首的法国斯特拉斯堡学派在 70 年代至 80 年代初完成的. 严加安于 1973 年去法国斯特拉斯堡留学. 直接参与了该学派的工作. 他在鞅与随机积分领域有许多成果. 这里列举三个在国际学术界有影响的贡献.

1. **局部鞅分解基本引理** (1977)　设 (M_t) 为一局部鞅，则对任给 $\varepsilon>0$，存在 (M_t) 的如下分解：

$$M_t=M_0+U_t+V_t,$$

其中 U 为局部有界鞅，且 $|\Delta U|\leqslant\varepsilon$，$V$ 为局部可积变差鞅.

这一引理揭示了局部鞅的内在结构. 它表明，研究局部鞅可以归结为研究有界鞅和可积变差鞅，从而使问题简化. 该引理被 Jacod-Shiryaev 的一部专著称为严氏引理.

2. 随机积分的初等定义（1980）　设(X_t)为一半鞅，H为一可料过程. 如果存在X的一个分解：$X=M+A$，其中M为局部鞅，A为有限变差过程，使得H关于M可积（即过程$\sqrt{H^2.[M, M]}$局部可积），H关于A在Stieltjes积分意义下按轨道可积，则H关于X可积，其不定积分$H.X$被定义为$H.M+H.A$，它不依赖于X的上述分解.

关于半鞅的随机积分存在彼此等价的不同定义，上述定义是最简单的. 从上述定义出发可以比较容易地证明随机积分的基本性质. 1991年严加安又进一步给出了循序可测过程对半鞅随机积分的广泛而合理的定义.

3. 一类L^1-凸集的刻画（1980）　设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$为一概率空间. 令$\underset{\sim}{B}$表示有界随机变量全体. 设K为L^1中一凸集，且$0\in K$. 则下列三断言等价：

1）对一切$\eta\in(L^1)^+\setminus\{0\}$，存在$c>0$，使得$c\eta\notin\overline{K-B^+}$；

2）设$A\in\mathscr{F}$且$P(A)>0$，则存在$c>0$，使得$cI_A\notin\overline{K-B^+}$；

3）存在一有界随机变量Z，使得$Z>0$，$a.s.$，且$\sup\limits_{\xi\in K}E[Z\xi]<\infty$.

上述结果本来是对Mokobdzki引理（证明半鞅的刻画时用到的一个关键性引理）给出的改进形式. 1989年Stricker发现用该结果及其证明技巧可以很容易推出数理金融学中连续时间情形下"无套利与存在鞅测度等价"这一重要定理. 在数理金融背景下，Kreps于1981年在较强假定下独立获得相似结果. 所以有些文献把数理金融学中上述基本定理称为Kreps-Yan定理，把前面结果的一个推广形式称为Kreps-Yan分离定理.

§ 3 对狄氏型理论的贡献

狄氏型（Dirichlet form）源于经典位势论. 自 1971 年日本学者 Fukushima 首次由局部紧可分距离空间上的正则狄氏型构造出强马氏过程以来，迄今该理论已发展成为把解析位势论与随机分析有机地结合起来的一个交叉学科分支. 在中国学者中最早认识到狄氏型理论重要性的是郑伟安. 下面的结果见于郑与 Lyows 合作的文章.[7]

保守对称扩散过程的分解 (1988)　设 $(X_t)_t \geqslant 0$ 为保守对称扩散过程，$(\varepsilon, D(\varepsilon))$ 为与 (X_t) 相联系的狄氏型. 则对任 $f \in D(\mathscr{E})$, $T > 0$，有

$$\tilde{f}(X_t) - \tilde{f}(X_0) = \frac{1}{2}M_t^f - \frac{1}{2}(\overline{M}_T^f - \overline{M}_{T-t}^f), 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{4}$$

其中 $\tilde{f}$ 为 f 的拟连续修正，$(M_t^f)_{0\leqslant t\leqslant T}$ 与 $(\overline{M}_{T-t}^f)_{0\leqslant t\leqslant T}$ 分别为由 $\tilde{f}(X_t)$ 确定的鞅与倒向鞅.

上述分解的优越性在于倒向鞅比 Fukushima 分解中的零能位势更易处理. 它被用于研究对称过程的穿跳次数，保守性检验，胎紧性检验以及其它问题. 有些文献称之为 Lyons-郑分解.

以下简述笔者与德国科学家合作在狄氏型研究中的部分成果.

无处 Radon 光滑测度的存在 (1989)　设 $(\varepsilon, D(\varepsilon))$ 为 $L^2(E, m)$ 上的狄氏型. 若 E 的任一单点集是零容度集，则在 E 上存在光滑测度 μ 使得 $\mu(G) = \infty$ 对任一非空开集 G 成立. 即 μ 是无处 Radon 的.

无处 Radon 光滑测度在 [8] 中首次发现. 它实际上是 [8] 中一个更一般结果的推论. 利用无处 Radon 光滑测度可以获得处处

奇异但却稠定的薛定锷算子，为研究奇异位势开辟新的途径. 在[8]中还用无处 Radon 光滑测度构造出首例不包含任何非零连续函数的狄氏型，这为研究非正则狄氏型提供了具体实例，刺激了尔后拟正则狄氏型框架的产生.

与光滑测度有关的一个重要研究课题是狄氏型的扰动理论，它与泛函分析和数学物理中的二次型扰动理论有密切联系. 在一般情况下，狄氏型关于符号光滑测度的扰动不必联系一个半有界自伴算子. 在[9]中首次获得被扰狄氏型联系半有界自伴算子的充分必要条件，并在狄氏型框架下改进了著名的 Kato-Lax-Milgram-Nelson 定理. 在[10]以及其它一些文章中把狄氏型扰动理论用于研究 Feynman-Kac 半群，首次获得 Feynman-Kac 泛函成为 L^2-强连续半群的充要条件. 并在最大限度放宽 Kato 条件的情形研究了 Feynman-Kac 半群的 L^p-光滑性，热核估计，热核的逐点一致有界性以及其它问题. 这些结果多次被国外有关文献引用.

上面的结果最早都是在正则狄氏型框架下获得的. 后来发现这些结果在拟正则狄氏型框架下都成立. 该框架产生于 1990 年以来的一系列文章. 1992 年出版了系统介绍拟正则狄氏型框架的英文专著[11]. 这里简述[11]中的三条结果. 为叙述简便以下假设 E 为可距离化 Lusin 空间，即可分完备距离空间的 Borel 子集(在[11]中 E 为一般 Hausdorff 空间.)

1. 拟正则狄氏型的解析刻画 $L^2(E,m)$ 上的狄氏型$(\mathscr{E}, D(\mathscr{E}))$联于于右连续强马氏过程的充要条件为：(i) 存在一个 $\mathscr{E}$-套 $\{E_K\}_{K=1}$，使得每一 E_K 是紧集；(ii) 存在 $D(\mathscr{E})$ 的一个 $\mathscr{E}_1$-稠子集 D，使得每一元 $u\in D$ 有 $\mathscr{E}$-拟连续修正 $\tilde{u}$；(iii) 存在 $\mathscr{E}$-例外集 N 以及可列个 $\mathscr{E}$-拟连续函数 $u_n\in D(\mathscr{E})$, $n\geq 1$ 使得 $\{U_n\}_{n\geq 1}$ 区分 $E\backslash N$ 的点. 称满足上述 (i) — (iii) 的$(\mathscr{E}, D(\mathscr{E}))$为**拟正则狄氏型**.

2. 拟正则狄氏型与马氏过程的一一对应 (i) 拟正则狄氏型与右(连续强马氏)过程一一对应；(ii) 严格拟正则狄氏型与 Hunt

过程一一对应；(iii) 具有局部性质的拟正则狄氏型与扩散过程一一对应.

3. 转化法 任一拟正则狄氏型拟同胚于可分完备距离空间上的正则狄氏型. 因此，在正则狄氏型框架获得的结果也适用于拟正则狄氏型框架.

注：可以用不同的局部紧化方法构造上述拟同胚. 在 [11] 使用 Ray-Knight 方法. 陈振庆独立发现可用 Gelfand-transform 构造上述拟同胚.

拟正则狄氏型框架突破了过去框架中“局部紧”和“正则”两大限制. 其解析刻画解决了该领域存在 20 年之久的问题. 目前拟正则狄氏型框架已被应用于无穷维随机分析，奇异位势理论，黎曼流形上的环空间及轨道空间，量子场论，大偏差理论，测度值随机过程，马氏过程理论等研究领域，其应用范围还在扩大. 系统介绍该框架的专著 [11] 已成为狄氏型领域中被经常引用的基本文献之一. 美国《数学评论》评价 [11] 为在 Fukushima 著作之后的“第二本联系狄氏型与马氏过程的主要著作”. 笔者被邀请在 94 年国际数学家大会作了题为“拟正则狄氏型及其应用”的 45 分钟邀请报告.

我国许多海外学子，如郑伟安，陈振庆，张土生，宋士奇等在狄氏型研究领域都有很好的研究成果，限于篇幅不一一介绍.

参 考 文 献

[1] E. Pardoux, S. Peng: Adapted solution of a backward stochastic differential equation, System and Control Letters, 14 (1990), 55—61.

[2] S. Peng: Probabilistic interpretation for systems of quasi-linear parabolic partial differential equations, Stochastics and Stochastic Reports, 37 (1991), 61—74.

[3] S. Peng: A generalized dynamic programming principle and Hamilton-Jacobi-Bellman equation, Stochastic and Stochastic Reports, 38 (1992), 119—134.

[4] E. Pardoux, S. Peng: Backward stochastic differential equations and quasilinear parabolic differential equations, in Lecture Notes in Control and Information Sciences, 176, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[5] 严加安，鞅与随机积分引论，上海科技出版社，1981

[6] S. W. He, J. G. Wang, J. A. Yan: Semimartingale Theory and Stochastic Calculus, Science Press and CRC Press Inc., 1992.

[7] T. J. Lyons, W. A. Zheng: A crossing estimate for the canonical process on a Dirichlet space and a tightness result, Asterisque 157—8 (1988), 249—271.

[8] S. Albeverio, Z. M. Ma: Nowhere Radon smooth measures, perturbation of Dirichlet forms and singular quadratic forms, in Lecture Notes in Control and Information Sciences 126, Springer, 1989.

[9] S. Albevverio, Z. M. Ma: Purturbation of Dirichlet forms-lower semiboundedness, closability and form cores, J. Functional Analysis, 99 (1991), 332—356.

[10] S. Albeverio, Ph. Blanchard, Z. M. Ma: Feynman-Kac semigroups in terms of signed smooth measures, in International Series of Numerical Mathematics, Vol. 102, 1991, Birkhauser, Bassel.

[11] Z. M. Ma, M. Röckner: Introduction to the Theory of (Nonsymmetric) Dirichlet Forms, Springer-Verlag, 1992.

[12] Z. M. Ma: Quasi-regular Dirichlet form and applications, Procedings of the International Congress of Mathematicians 1994, Birkhauser, Bassel.

解析数论在中国

王　元
（中国科学院数学研究所）

1. 回　　顾

中国解析数论研究的创始人是华罗庚，他1910年生，江苏金坛人．由于家贫，初中毕业后，仅念完一年职业学校，即辍学在家．他发奋自学数学，并能在上海《科学》杂志上发表一些初等数学文章，从而引起了熊庆来、杨武之等注意．1931年，清华大学算学系主任熊庆来邀华罗庚来清华工作，任系助理员．在杨武之的指导下，华罗庚走上了研究数论之路．

1936年，清华大学以访问学者名义，送华罗庚去英国剑桥大学深造，师从哈代（G. H. Hardy）．在与同辈互相研讨下，华罗庚在解析数论方面取得了突出成就．由于抗日战争爆发，华罗庚于1938年回国，在昆明任西南联合大学数学系教授．在华罗庚的领导下，闵嗣鹤与钟开莱跟他一起研究解析数论．（后来，钟开莱改习了概率论．）1946年，华罗庚去美国工作．

中华人民共和国刚成立，华罗庚即于1950年初回国服务．1951年，华罗庚被任命为中国科学院数学研究所所长．1953年，他在数学所组织了“数论导引”与“哥德巴赫（G. Goldbach）猜

想”两个讨论班，指导越民义、许孔时、王元、吴方、魏道政、严士健、任建华研究解析数论. 1956 年，华罗庚调厦门大学陈景润来数学所工作. 1955 年，闵嗣鹤在北京大学数学系开设解析数论专门化，参加的学生有潘承洞、尹文霖、邵品琮与侯天相. 以前，闵嗣鹤还指导过迟宗陶. 解析数论的研究领域也从华罗庚与闵嗣鹤熟悉的指数和估计及其应用拓展到筛法、模形式论、二次型论、丢番图分析、超越数论、代数数论及数论的应用等. 另外，中国还有几位基本上靠自学成才并能在解析数论方面作出贡献的人，他们是董光昌、丁夏畦与潘承彪.

近六十年来，中国经历了抗日战争与解放战争. 建国后，历次政治运动不断，特别是“文化大革命”十年浩劫. 但解析数论的研究不仅没有间断，而且不断取得令人鼓舞的成绩，这是十分难得的. 本文仅列举几条经典解析数论方面最重要的成果如下. 这些结果及其证明在国内外该领域最重要的著作中均可以见到.

2. 华氏定理

华氏定理（1940） 命 q 为一个正整数，$f(x)=a_kx^k+\cdots+a_1x$ 为一个 k 次整系数多项式及最大公约$(a_k,\cdots,a_1,q)=1$. 则对于任何 $\varepsilon>0$ 皆有

$$S(q,f(x))=\sum_{x=1}^{q}e(f(x)/q)=O(q^{1-\frac{1}{k}+\varepsilon}),$$

此处 $e(z)=e^{2\pi iz}$ 及与“O”有关的常数为仅依赖于 k 与 ε 的常数 $c(k,\varepsilon)$.

华氏定理溯源于高斯（C. F. Gauss），他首先引进 $f(x)=ax^2$ 的特例情况，即所谓高斯和

$$S(q,ax^2),\quad (a,q)=1,$$

并得到估计

$$S(q,ax^2)=O(q^{1/2}).$$

高斯引进并研究高斯和的目的在于给出初等数论中非常重要的二次互反律一个证明. 以后，不少数学家企图推广高斯和及他的估计，但他们只能对特殊的多项式所对应的 $S(q,f(x))$ 取得成功. 这一历史名题直到 1940 年，才由华罗庚解决.

华氏定理是臻于至善的，即误差主阶 $1-\frac{1}{k}$ 已不能换成一个更小的数. 这只要取 $f(x)=x^k$ 及 $q=p^k$（p 为素数）就可以知道. 所以依・维诺格拉朵夫（I. M. Vinogradov）称赞华氏定理是惊人的.

华氏定理的直接应用是，可以处理比希尔伯特(D. Hilbert)—华林（G. Waring）定理更为广泛的问题：命 N 为一个正整数，$f_i(x)(1\leqslant i\leqslant s)$ 是首项系数为正的 k 次整值多项式. 考虑不定方程

(1) $$N=f_1(x_1)+\cdots+f_s(x_s)$$

的求解问题. 特别取 $f_1(x)=\cdots=f_s(x)=x^k$，即得

(2) $$N=x_1^k+\cdots+x_s^k.$$

1770 年，华林提出猜想：当 $s\geqslant s_0(k)$ 时，(2) 有非零非负整数解. 华林猜想是希尔伯特于 1900 年证明的. 于是华林猜想就成了著名的希尔伯特—华林定理. 但用希尔伯特方法所能得到的 $s_0(k)$ 将是很大的. 20 年代以后，哈代、李特伍德(J. E. Littlewood)与依・维诺格拉朵夫用圆法及指数和估计法对 $s_0(k)$ 作了精致的定量估计. 用华氏定理基本上可以将依・维诺格拉朵夫关于华林问题的重要结果推广至不定方程 (1)，即假定 (1) 满足必须满足的条件，则当 $s\geqslant s_0=O(k\log k)$ 及 N 充分大时，(1) 有非零非负整解. 当 $s\geqslant s'_0=O(\ddot{o}^2\log k)$ 时，方程 (1) 的解数有一个渐近公式.

3. 华氏不等式

华氏不等式 (1938)　命 N 为一个正整数，$f(x)$ 为一个 k 次整系数多项式，$T(a)=\sum_{x=1}^{N}e(af(x))$，则对于任何 $\varepsilon>0$ 及 $1\leqslant j\leqslant k$ 时皆有

$$\int_0^1 |T(a)|^{2^j}da\leqslant c(k,\varepsilon)N^{2^j-j+1},$$

华氏不等式的直接应用为不定方程(1). 由圆法来处理方程(1)，则首先需将方程(1)的解数表示成 (0，1) 上的一个积分，然后将(0，1) 分成互不相交的优弧与劣弧之并. 优弧上的积分给出(1)的解数的主项，需证明劣弧上的积分是一个低阶项，从而可以忽略不计，这样就得到了解数渐近公式. 华罗庚证明了：假定 $f_i(x)(1\leqslant i\leqslant s)$ 为满足必须满足的条件的 k 次 整值多项式. 则当 $s\geqslant 2^k+1$ 时，方程(1)的解数有一个渐近公式. 特别对于华林问题，即方程 (2)，当 $s\geqslant 2^k+1$ 时，对充分大的 N，(2)有非寻常非负解，且解数有渐近公式. 当 $k\leqslant 10$ 时，这一结果是华林问题的最佳结果. 直到半个世纪之后，基于对华氏不等式的某些改良，沃恩 (R.F.Vaughan) 与希斯布朗 (D.R.Heath-Brown) 才能对华罗庚关于华林问题的结果作点改进，但他们所用的方法却繁得多了.

基于华罗庚关于解析数论的基本方法，即关于指数和估计的华氏定理与华氏不等式，再加上依・维诺格拉朵夫的韦尔 (H. Weyl) 和估计与关于素数变数的指数和估计，华罗庚系统地研究了不定方程 (1) 及其他堆垒问题的求解问题，并限制变数 $x_1,\cdots,x_s$ 均取素数值. 华罗庚的结果总结在他的专著《堆垒素数论》中，这本书被译成俄文、英文、德文、匈牙利文与日文. 它是圆法、指数和估计及其应用方面最重要的经典著作之一.

4. 陈氏定理

陈氏定理（1966） 每一个充分大的偶数都是一个素数及一个不超过两个素数的乘积之和. 简记为（1，2）.

诚如哈贝斯坦(H. Halberstam)与黎切尔特(H. E. Richert)所称，陈氏定理为“惊人的定理”，而且“从筛法的任何方面来说，它都是光辉的顶点”.

陈氏定理与筛法相关. 筛法导源于公元前250年的“埃拉朵斯染尼氏（Eratosthenes）筛法”. 1919年，布伦（V. Brun）对这一方法作出了重大改进，并将它用于哥德巴赫猜想. 1947年，赛尔贝格(A. Selberg)给出了埃拉朵斯染尼氏筛法另一个重大改进.

哥德巴赫猜想是1742年哥德巴赫与欧拉(L. Euler)的通信中提出来的，可以表述为：每一个不小于4的偶数都是两个素数之和. 简记为（1，1）.

1900年，在希尔伯特的著名演讲中，又将这一猜想列入他的23个数学问题中的第八问题. 布伦首先证明了，每个充分大的偶数都是两个素因子个数均不超过9的整数之和，简记为（9，9），余类推.（1，1）即表示哥德巴赫猜想对充分大的偶数成立. 布伦的方法与他的结果先后被拉代马海尔(H. Rademacher)，艾斯特曼(T. Estermann)，黎奇(G. Ricci)，布赫斯塔布(A. A. Buchstab)与孔恩(P. Kuhn)所改进.

将布伦、布赫斯塔布与赛尔贝格方法相结合，王元改进了布赫斯塔布的结果，他证明了

（3，4）（王元，1956）.

再与孔恩方法相结合，他又得到了当时的最佳结果

（2，3）（王元，1957）.

处理哥德巴赫猜想的另一途径是，将布伦筛法与林尼克

(Yu. V. Linnik) 的大筛法相结合. 首先是雷尼 (A. Renyi) 于 1947 年证明了，存在常数 c 使 (1, c) 成立. 潘承洞与巴尔巴恩 (M. B. Barban) 独立地确定了 c 之值，潘承洞的结果如下：

(1, 5) (潘承洞, 1962),

(1, 4) (潘承洞, 1963).

这是当时的最佳结果. 由于邦比里 (E. Bombieri) 与阿·维诺格拉朵夫 (A. I. Vinogradov) 对大筛法及算术级数素数分布的均值定理的重大贡献，他们于 1965 年证明了 (1, 3). 在上述成就的基础上，加上天才的创造，陈景润于 1966 年证明了 (1, 2). 陈景润的方法在国外称为“转换原理”.

5. 其他工作

在经典解析数论的下列方面：依·维诺格拉朵夫的韦尔和估计的改进与简化；塔内 (G. Tarry) 问题；高斯圆内整点问题；狄里赫雷 (P. G. L. Dirichlet) 除数问题；黎曼 (G. F. B. Riemann) ζ-函数在临界线上的值估计；最小原根估计；最小皮尔 (J. Pell) 氏方程解的估计；算术级数中最小素数的估计；小区间中殆素数估计；小区间中哥德巴赫数的估计，有限制的三素数定理；无平方因子数的估计以及球内整点问题与高维除数问题等，中国数学家都作出了引人注目的贡献，在此就不详细叙述了.

参考文献

[1] 华罗庚，On exponential Sums，J. of CMS. 1940，301—312.

[2] 华罗庚，On Waring's Problem，Quart. J. Math.，1938，199—202.

[3] 陈景润，On the representation of a large even integer as the sum of a prime and the product of at most two primes，Kexue Tongbao，1966，385—386.

[4] 陈景润，ibid，Sci. Sinica，1973，157—176.

[5] 潘承洞，On representation of even number as the sum of a prime and an almost prime，Sci. Sinica，1962，873—888.

[6] 潘承洞，On representation of large even integer as the sum of a prime and a prouct of at most 4 prime，Sci. Sinica，1963，455—473.

[7] 王元，On the representation of large even integer as a sum of a product of at most three primes and a product of at most four primes，Acta Math. Sinica，1956，565—582.

[8] 王元，On the representation of large even integer as a sum of two almost primes，Sci. Record，1957，15—19.

[9] 华罗庚，堆垒素数论，科学出版社，1953.

[10] 华罗庚，指数和的估计及其应用，科学出版社，1963.

[11] 潘承洞，潘承彪，哥德巴赫猜想，科学出版社，1981.

[12] 王元，哥德巴赫猜想研究，黑龙江教育出版社，1987.

[13] I. M. Vinogradov，The method of Trigonometric Sums in Number Theory，Nauka，1980.

[14] R. C. Vaughan，The Hardy-Littlewood method，Camb. Tracs，80，1981.

[15] G. I. Arkhipov，A. A. Karatsuba，V. N. Chubarikov，Theory of Multiple Trigonometric Sums，Nauka，1987.

[16] H. Davenport，Analytic Metheods for Diophantine Equations and Diphantine Inequalities，Ann Arbor publishers，1962.

[17] H. Halberstam and H. E. Richert, Sieve Methods, Acad. Press, 1974.
[18] H. E. Richert, Lectures on Sieve Methods, Tata Inst. 1976.

模型论对经典数学的应用

王世强
（北京师范大学数学系）

（一）

中国数学会成立已经60周年了．环顾这60年来，数理逻辑作为一个较新的学科，在国外有了很大发展，出现了如K. Gödel，A. Tarski，A. Robinson，S. Shelah等一批著名学者及一系列重要成果．数理逻辑在我国虽然还很薄弱，但在中国数学会的支持下，也经历了从无到有，由少数前辈的提倡到一批中青年工作者的成长发展过程．在我所知道的前辈学者中，20年代就有傅种孙对B. Russel的著作及D. Hilbert《几何基础》的译述[1]，哲学家金岳霖对逻辑学的传授[2]．在30年代，有汤璪真对模态逻辑的研究[3]，肖文灿对集合论的介绍[4]．从40年代到解放后，有胡世华对多值逻辑及递归论等的研究[5]，莫绍揆对模态逻辑、递归论及各种公理系统等的研究[6]，哲学家沈有鼎，王宪钧对数理逻辑及其历史的研究[7]等．这些前辈们还以各种方式影响、教育和培养了很多专业人才．从50年代后期到70年代中期，数理逻辑在国内虽然由于种种原因而发展缓慢，但在此前后，在海外华人中，作出重要成就的有王浩在公理集合论及判定问题等方面的研究以及机器证明的开创性实验[8]，有协助Tarski发展模型论的张辰中的一系列有关

研究[9]. 近十几年来，在国内以及国外留学生中又作了不少研究工作. 纵观我国数理逻辑几十年来发展的成绩，除了前辈们学术工作外，还在于成长了一批中青年工作者[10]，他们将是今后推动我国数理逻辑继续发展的基本力量.

(二)

数理逻辑是用数学方法深入研究逻辑规律的学科，在其各分支（主要有模型论、递归论、公理集合论、证明论等）中都有其自身要研究的课题. 本文不谈这方面的专门问题，也不涉及数理逻辑对计算机科学的应用，而只举例简介模型论及有关方法对经典数学中一些问题的应用. 在这类例子中，如 Hilbert 第 1 问题、Hilbert 第 10 问题、群论中字的问题等的解决是人们已较为熟悉的，以下再举几个较新的例子.

(2·1) Whitehead 问题对 ZFC 的独立性.

设 A 为一可换群，Z 为整数加群，如果每个正合列

$$O\to Z\to B\to A\to O$$

都是分裂的，暂称 A 为 W-群. 1952 年 J. H. C. Whitehead 曾问：是否每个 W-群都是自由群? 1974 年，S. Shelah 证明了：(a) 如果在通常的集合论公理系统 ZFC 之外加用新公理 $V=L$（可构成公理)，则每个基数为 ω_1（第一个不可数基数）的 W-群都是自由群；(b) 如果在 ZFC 之外加用新公理 MA (ω_1)（ω_1-Martin 公理)，则存在基数为 ω_1 的非自由 W-群. 对于更大的基数，他也证明了类似的结果. 这就说明了 Whitehead 问题对 ZFC 的独立性，因而此问题是不可能在通常的朴素集合论中解决的[11].

(2·2) Kaplansky 问题对 ZFC 的独立性.

设 X 为一紧致 Hausdorff 空间，以 $C(X,K)$ 记 X 上一切复值连续函数所构成的（复数域 K 上的）结合代数. 1948 年 I. Kaplan-

sky 提出一问题，其等价形式为：是否$C(X,K)$上的每一范数都是完备的？1976 年，H. G. Dales 和 J. Esterle 各自独立证明了：在连续统假设之下，Kaplansky 问题有否定的答案. 另一方面，也在 1976 年，W. H. Woodin 和 R. Solovay 利用迭代力迫法证明了：存在 ZFC 的模型，在其中 Kaplansky 问题有肯定的答案[12].

(2·3) 复变函数论中一个独立性结果.

1980 年，J. Becker，C. W. Henson 与 L. A. Rubel 共同综合运用函数论及数理逻辑方法证明了："对于复平面中每一多连通区域，都存在保角映射不变量的完全系"这一命题是独立于 ZFC 的.（其中的不变量有一定含意，下同.）1991 年，L. Lempert 与 L. A. Rubel 又证明了："对于二维复空间 C^2 中每一单连通区域，都存在双全纯映射不变量的完全系"这一命题也是独立于 ZFC 的[13].

关于独立性结果的其他例子，可参看注[11]中所引作者等的介绍性专书.

(2·4) A. Robinson 于 60 年代初用模型论方法创立的非标准分析，人们已比较了解. 非标准分析在测度论、概率论、泛函分析、微分方程、数学物理、数理经济等分支中有不少应用. 在我国，李邦河用此方法研究广义函数的乘法，得到很好的结果. 李雅卿也作了有关的研究[14].

(2·5) 模型论方法对代数问题的应用最多. 例如：否定解决了群论中的字问题及 Burnside 问题；找出了大量不同构的可数代数封闭群；对 Tarski 关于实闭域及代数闭域的可判定性结果作了不少推广；证明了关于 p-进域 Q_p 的 Artin 猜想；对 p-进闭域理论得到不少结果（包括与 Hilbert 第 17 问题类似的肯定性结果）；对各种代数整数环得到关于 Hilbert 第 10 问题的否定或肯定性答案；等等. 此外还有很多关于代数系统的模型论问题的研究，形成了"模型论代数"的专门方向. 这些方面已经出了不少专书，本文不再介绍.

(三)

最后，附述我组近十几年来在模型论方面的一些工作简况(包括历年成员的有关工作)[15].

(**3·1**) 80 年代初，作者用模型论方法证明了：对于整数环及某些代数整数环，存在适合 Goldbach 性质的可换扩环，也存在不适合 Goldbach 性质的可换扩环，从而说明了 Goldbach 命题对这些环的理论在一种弱意义下的独立性. 对于孪生素数命题，也得到了类似结果. 后来沈复兴等也作了有关研究.

(**3·2**) 在 R. Lyndon 和 Y. Gurevich 建议下，罗里波于 1983 年对可换群的 1 阶理论作了研究，给出一种新的判定方法，很大地改进了前人成果. 在此之前及以后，罗还作了其他有关模型论及计算复杂性的研究.

(**3·3**) 80年代初，作者在文革前有关工作(当时吴望名曾参加)基础上开始研究格值模型论，沈复兴继续作了较系统的研究，卢景波和沈云付也作了有关工作. 沈复兴后来又曾参加 V. Weispfenning 关于格序群判定问题的研究. 卢景波后来作了有关泛代数的研究.

(**3·4**) 在 Topos 理论创始人 F. W. Lawvere 指导下，孟晓青自 1987 年以来对范畴论及 Topos 理论作了研究，提出了凸集上的一种非对称度量，近年并开始应用于概率统计等问题中.

(**3·5**) 1988年，沈恩绍对模型论中的伴随算子作了研究. 后来，沈参加及发展了 H. -D. Ebbinghaus 关于分划逻辑的研究(与计算机科学有关). 最近田启家也作了有关的工作.

(**3·6**) 1989年，田卫东把模型论方法应用于 Jacobi 猜想的研究，给出了一种新思路. 后来田又进行了代数及数论方面的研究. 最近，王明生也由模型论扩展到对交换代数中模的同调维数

及代数几何的研究.

(3・7) 1990年，何青研究了迭代力迫法，后来并研究无限置换群. 近二三年来，张玉平作了稳定性理论方面的研究，王捍贫作了模的模型论方面的研究，胡万军给出了模型上的一种拓扑，作者用模型论方法对域上无限方阵的性质作了初步探讨. 此外，我组还有一些其他工作.

总起来看，我组关于模型论及其应用的研究还处于起步阶段，工作不多，比较分散，在质量上也与国际先进水平有较大差距，这是需要我们努力改进和赶上的. 另外，近年来国外将模型论方法用于计算机科学的研究工作迅速增加，在国内也已有了一定的开展，这也是值得我组学习的新方向.

附　注

[1] 见B. Russel著，傅种孙、张邦铭译《罗素算理哲学》(商务印书馆，1922) 及D. Hilbert著，傅种孙、韩桂丛译《几何原理》(商务印书馆，1924).

[2] 关于金岳霖的教学及学术研究，在《中国大百科全书(哲学)》"金岳霖"条目中有简介.

[3] 汤璪真的部分论文见Bull. Amer. Math. Soc. vol 42 (1936) pp707-709, pp743-746; vol44 (1938) pp737-744.

[4] 见肖文灿《集合论初步》(商务印书馆，1939).

[5] 关于胡世华的科研工作，可参看《中国现代科学家传记》第三集 (科学出版社，1992) "胡世华"篇.

[6] 关于莫绍揆的科研工作，可参看《莫绍揆文集》(南京大学出版社，1992).

[7] 关于沈有鼎，王宪钧的教学及学术研究，在《中国大百科全书（哲学）》“沈有鼎”，“王宪钧”二条目中有简介.

[8] 关于王浩的科研工作，在《中国大百科全书（哲学）》“王浩”条目中有简介.

[9] 张辰中（Chen-Chung Chang）是 A. Tarski 的学生，从 50 年代到 70 年代在模型论方面有不少研究工作（可参看 Math. Reviews 中的介绍）. 他与 J. Keisler 合著的《Model Theory》（North-Holland Publ. Co，1973 第 1 版，现已出至第 3 版），是模型论方面最重要的教材及基础性科研参考书.

[10] 在中年工作者中有（按拼音顺序）：陈练寒，丁德成，冯琦，高恒珊，徐书润，胡久稔，黄且圆，黄文奇，李祥，林毓材，卢景波，陆钟万，罗里波，吕义忠，孟晓青，沈百英，沈恩绍，沈复兴，史念东，孙文植，孙晓岚，王驹，王世强，王元元，汪芳庭，杨安洲，杨东屏，于小康，张宏裕，张锦文，张鸣华，张明义，朱梧槚等. 还有不少工作者转入计算机科学领域，在哲学界也有一批数理逻辑工作者.

[11] 见 S. Shelah，Israel Jour. Math.，18（1974），243-256. 也可参看王世强、杨守廉《独立于 ZFC 的数学问题》（北京师范大学出版社，1992）.

[12] 可参看 H. G. Dales and W. H. Woodin，《An Introduction to Independence for Analysts》（Cambridge Univ. Press，1987）. 也可参看注 [11] 所引作者等的书.

[13] 见 J. Becker 等，Annals of Math.，（2）112（1980），no. 1，123-178 及 L. Lempert 等，Proc. Amer. Math. Soc.，113（1991），no. 4，1055-1065.

[14] 可参看吴文俊主编《现代数学新进展》（安徽科学技术出版社，1988）中李邦河的文章.

[15] 这方面的工作，多数已在国内外发表，在 Math. Reviews 中也有介绍(其中部分工作在《Advances in Science of China—Mathematics》vol. 2 (1988) 中有介绍). 有的工作见历年各人在国内外的博士论文. 本文未提及在我组毕业的硕士生的工作，其中孙晓岚，易小丁，饶炬，岳其静已先后在国外获得博士学位.

有限群模表示论的研究在中国的开展*

石生明
（首都师范大学）

有限群的模表示是有限群到特征 p 的域上线性群的同态．研究群表示是要利用具体的线性群（矩阵群）来描述群的构造，是研究群的有力工具．它也是当今有限群论的主流方向之一．

有限群模表示论的研究始于 L. E. Dickson (1902, 1907)，而 R. Brauer 是模表示论的奠基人．后者对此进行了长期深入的研究（1935—1976），且作出最重要的贡献．段学复是中国研究模表示论的第一位数学家，1936 年他毕业于清华大学数学系，1940 年进入加拿大多伦多大学，师从 R. Brauer 教授．1941 年获硕士学位．然后转入美国普林斯顿大学数学系，并于 1943 年获博士学位．在那里，他在 R. Brauer 和 C. Chevalley 的指导并合作下，对有限群模表示论和代数李群两方面都作了出色的工作．1946 年，段学复回国工作，并一直是国内代数学学术活动的主要组织者．他亲自主持了全国第一届，第二届代数学会议和 1984 年北京国际群论讨论会，对中国代数学特别是群论的发展和人才培养起了重要作用．

在 Brauer 刚建立起有限群模表示论的框架时，段学复就跟他学习和合作研究．Brauer 在表示论中的一个重要贡献是引入了特征标块（或 p 块）的概念，他长期考虑的一个问题是找出 p 块性

* 本文的部分内容经过段学复教授的审阅．作者还参阅了王杰同志的文章“数学教授段学复”（数学进展 23 卷 4 期（1994）），谨向他们表示衷心的感谢．

质与群的结构之间的联系（参看 R. Brauer [27]（1976）. 在 1942 年 Brauer 的重要论文[6]的指引下，段学复自己以及和 Brauer 合作发表了三篇论文 [7]，[16]，[17]，其主要结果为：

(i) Brauer-段学复（1945）. 决定了阶为 pq^bg' 的全部单群，其中 p，q 是不同素数，b，g' 为正整数，且 $g'<p-1$. 特别当 p，q，r 为不同素数时，prq^b 阶单群仅可能是 60 阶单群 A_5 和 168 阶单群 PSL（2，7）.

(ii) 段学复（1942）. 证明了 L. E. Dickson 的"线性群"一书中所列的单群表直到 10000 阶是完全的.

(iii) 段学复（1944）. 对 pg' 阶线性群 G，其中 p 为素数，$(p, g')=1$. 若 G 的维数 $<\frac{2p+1}{3}$，且其 p 阶子群不正规，则可完全决定其构造.

(iv) 建立了特征标块的三个引理（Brauer-段学复）（1945）：

引理 1 P 是 G 的 S_p 子群. G 的主块中含有维数 $<2p$ 的 1-1 不可约特征标. 若 $G=G'$，则 $C_G(P)$ 是 p 群.

引理 2 （特征标块的分离原则） $|G|=p^ag^bg_0$，其中 p，q 是不同素数，而 $(pq,g_0)=1$. 若 G 不含 pq 阶元，则有

(i) 令 $B(p)$,$B(q)$ 分别为 G 的固定的 p 块和 q 块，则 $\sum\chi(1)\chi(g)\equiv 0(\mathrm{mod}\ q^b)$，对 G 的所有 p 奇异元成立，其中 χ 跑遍既属 $B(p)$ 又属 $B(q)$ 的全部不可约特征标.

(ii) 若 $pq /\!/ |G|$，则在主 p 块和主 q 块中有公共的不可约非主特征标.

引理 3 设 $Z(G)=\{1\}$. 又设 P 是 G 的 S_p 子群，$|Z(P)|=p^b$. 若 G 有 1-1 不可约特征标 χ，其维数为 p^n，则 χ 在亏数 $d\leqslant a-b$ 的 p 块中，特别当 P 是交换群时，χ 属于亏零块.

此外，段学复（[16]）还得到了 pg^{t} 阶群的 Brauer 树的一系列性质.

以上工作虽是五十年前的成果，但它是开创性的，即始创运用有限群模表示论,特别是用特征标块的性质来研究群的结构.自此以后，它一直是群论研究的主流方向之一，且以此为开端被群论学家继续发展都获巨大成果. 例 (i)、(ii) 两项（包括 Brauer 的 [6]）中的工作最终发展成为有限单群的分类. 而 (iii) 中的工作由 Feit，Thompson（[11]）等人发展深入，至今未衰. 而 (iv) 中建立的 p 块的一些性质后来一再被应用. 在线性群的研究中直到 60 年代除 (iv) 的工作外，没有用到 p 块的其它性质. 因此，这些工作是经典性的，曾被 Feit 全文写入他的名著 [10] 中（参看 [28a]，[28b]，作者在文中实质上各附以专名引用).

1946 年段学复回国后，指导曹锡华学习代数知识. 1948 年他推荐曹锡华赴美跟 R. Brauer 学习模表示论. 他的毕业论文的题目是 "p^2q^t 阶的群".

50 年代以来段学复沿此方向继续工作并培养人才. 但文化大革命使之中断. 文革后他的学生石生明转向研究有限群模表示论，并协助他培养博士生张继平等人. 后来国内又有樊恽，张广祥等转入这方向的研究. 十年来他们已作了一批成果进入国际前沿.

一　亏群问题

亏群在有限群模表示论的块理论中起关键作用. 它是联系群论性质和表示论性质最重要的对象. "一个 p 子群 D 何时是有限群 G 的 p 块的亏群? 如果 D 是亏群，用群论性质来计算以 D 为亏群的 p 块的个数"，这个问题在有限群表示论中具有重要意义，R. Brauer 在 [5] 中将它列为问题 19，而在 [10] 中被 W. Feit 列为问题 5. Brauer 和 Fowler（1955），Tsushima（1977），Iizuka 和

Watanabe (1972) 以及 W. Willems (1978) 都对此作过贡献. 1983 年 G. R. Robinson 在 [13] 中得到一个精确的公式来计算这个数目. 公式中该数目等于某矩阵的秩，其矩阵元与 G 的 (P, P) 双陪集的集合有关. 其中 P 为 G 的 S_p 子群. 石生明在 [14] 中给出一个推广的公式和若干结论，但去掉了限制 $D \triangle G$. 当然以上公式还是难于进行具体计算. 故对一个具体的 p 子群 D，计算以 D 为亏群的 p 块的数目或找出有这样的 p 块存在的充分必要条件仍是一个重要的课题. 关于 p 块的数目，下列定理是第一个完美的结果.

定理 (Brauer) 设 D 是 G 的 S_p 子群，则 G 中以 D 为亏群的 p 块的数目等于 G 中以 D 为亏群的 p 正则类的数目.

当 $D=\langle 1\rangle$ 时，H. Blau 和 G. Michler 对有 $T.I.$ S_p 子群的群 G 给出了以 D 为亏群的 p 块的数目 ([3]). 石生明在 [14] 中对 D 是 $DC_G(D)$ 的 S_p 子群时证明了上面 Brauer 定理的结论仍成立.

对于以 p 子群为亏群的 p 块的存在性条件，中国学者作出一系列较完整的结果. 以前国际上仅有零星的结果.

对 $D=\langle 1\rangle$，以 D 为亏群的 p 块我们常称为亏零块. 张继平首先作出一个有意义的结果.

定理 ([18], [19]) 有限群 G 具有循环的 S_p 子群 P，则 G 有亏零块的充要条件为 $O_p(G)=1$.

接着中国学者对具有 $T.I.S_p$ 子群的有限群的亏零块 ([26])，Lie 型单群的亏零块 ([22])，亏群为极大 sylow p 交的 p 块，具有余循环亏群的 p 块，以 S_p 子群的极大 p 子群为亏群的 p 块 ([15]) 等的存在性找到了充要条件. 最后张继平引进强根 p 子群的概念，证明了

定理（[21]）G 为有限群，D 为 G 的强根 p 子群，则 G 有亏群为 D 的 p 块.

该定理包含了上面除 *Lie* 型群以外的所有结果. 当 $D=\langle 1\rangle$ 时，它还证实了 J. Alperin 的一个猜想（[1]）.

此外，张继平在可解群的亏零块和全亏群方面作出了两个漂亮的结果.

定理（[20]） 令 G 是奇阶有限群，p 是 $|G|$ 的素因子且 $O_p(G)=1$. 设对任何素数 q 和正整数 n，G 是 $E(p,q,n)$ 自由的，则 $O_{p'}(G)$ 中有元素 x 使 $C_G(x)$ 是 p' 群. 因此有亏零块.

定理（[22]）G 为有限群，P 是 G 的 S_p 子群及 $M=O_{p'}(C_G(p))$，则 G 是全亏群当且仅当

(i) $O_{p'}(G)=\bigcup\limits_{x\in G}M^x$;

(ii) $F^*(G/O_{p'}(G))=O_p(G)O_{p'}(G)/O_{p'}(G)$，此外当 $p=2$ 时还可以是

$$F^*(G/O_{2'}(G))=(N\times O_{2'}(G))/O_{2'}(G),$$

其中 N 是 G 的正规子群且 N 的所有分支为 M_{22} 型或 M_{24} 型的.

二　有限线性群

域上小维数的线性群的研究可追溯至 Jordan（复数域），Dickson（有限域）. 给定某素数 p，研究维数 $<p$ 的线性群的结构就是这类问题. 由于 Blichfeldt 首先决定了 2. 3. 4 维的所有复线性群，故称为 Blichfeldt 问题. 前面提到过的 Brauer-段学复的结果（iii）是这方面开创性成果. Brauer 注意到小维数线性群的重要意义，在 [5] 中列出下述问题.

问题 39　对何种 m 维复线性群，存在素数 $p\geqslant m+1$ 且

$p\mid |G|$，使 G 没有阶 $p^a>1$ 的正规子群.

问题 40 决定有限域上小维数的全部线性群.

Feit [9] 对有 p 阶 S_p 子群的线性群给出过研究它们的一些关键方法. 过去十年来又使用了有限单群分类，于是困难的线性群问题又有了新的突破. P. Ferguson 确定了维数$\leqslant p-3$ 的复线性群的构造（[12]），当 $|G|$ 仅含 p 的一次幂时，W. Feit 决定了维数$\leqslant p-2$ 的复线性群（[8]）. 1989 年张继平最终决定了维数$\leqslant p-1$ 的复线性群的构造（[23] 中定理 2，推论 3，推论 4），并得到了下述结果：

定理（[23]） 令 G 是 $m>5$ 维复线性群. 若 G 有非平凡 S_p 子群 P 且 $p>m+1$，则 P 是 G 的正规子群. 除非 G 同构于 $SL(2,p-1)\times Z(G)$ 或 $G=O_{pp'}(G)M$，其中 M 是 G 的正规子群使得 $M/Z(M)\cong PSL(2,p)$.

这定理能清楚地回答前述问题 39.

对于特征 p 域上小维数线性群 G 的研究，张继平在 [25] 中对维数$<p-2$ 的这样的 G，当其 S_p 子群是交换群时进行了分类. 接着张继平与 H. Blau 合作证明了下述定理.

定理（[4]） G 是有限群，F 是特征 p 的域. 设有忠实 FG 模 V，其维数 $d<p$. 令 $\overline{G}=G/O_p(G)$. 又假设 $G=O^{p'}(G)$. 则能决定 G 或 $G/Z(G)$ 或 $\overline{G}/Z(\overline{G})$ 的结构.

这从本质上解决了 Brauer 的问题 40.

三 其它工作

除上面两方面工作外、任意域上的模表示论的一些问题，如块不变量的定义，幂零块的定义与结构的研究；Green 环与 p 置换

模；块覆盖与 Brauer 对应；$k(GV)$ 问题；亏群被单模顶所界定的 Puig 问题，"Fong 简化"的推广等方面也作了有意义的工作.

参考文献

[1] J. L. Alperin, Weights for finite groups. Proc. Symposia in Pure Math. 47 (1987).

[2] H. F. Blichfeldt, "Finite Collineation Groups", University of Chicago Press, Chicago, 1917.

[3] H. Blau and G. Michler, Modular representation theory of finite groups with T. I. Sylow p-subgroups, Trans. Amer. Math. Soc. 319 (1990).

[4] H. Blau and J. P. Zhang, Linear groups of small degree over fields of finite characteristic, to appear in J. Algebra.

[5] R. Brauer, Representations of finite groups, in "Lectures on Modern Mathematics", Vol. 1, John Wiley & Sons, New York, 1963.

[6] R. Brauer, On groups whose order contains a prime number to the first power. I, II, Amer. J. Math. 64 (1942).

[7] R. Brauer and H. F. Tuan, On Simple groups of finite order, I, Bull. Amer. Math. Soc. 51 (1945), 756-766.

[8] W. Feit, Groups which have a faithful representation of degree less than p-1, Trans. Amer. Math. Soc. 112 (1964).

[9] W. Feit, Groups with a cyclic Sylow subgroup, Nagoya Math. J. 27 (1966).

[10] W. Feit, "The Representation Theory of Finite Groups", North-Holland, 1974.

[11] W. Feit and J. G. Thompson, Groups which have a faithful representation of degree less than (p-1) /2. Pacific J. Math. 11 (1961).

[12] P. Ferguson, Complex linear groups of degree at most p-3, J. Algebra, 92 (1985), 246-252.

[13] G. R. Robinson, The number of blocks with a given defect group, J. Algebra 84 (1983).

[14] S. M. Shi, On the number of p-blocks with given defect groups and some applications of the p-power homomorphisms, Lecture Notes in Math. 1185 (1986).

[15] S. M. Shi, Some results on defect groups, J. Algebra 142 (1991).

[16] H. F. Tuan, On groups whose orders contain a prime number to the first power. Ann. of Math. 45 (1944).

[17] H. F. Tuan, On simple groups of order less than 10000 (unpublished), See Bull. Amer. Math. Soc. 48 (1942), 356.

[18] J. P. Zhang, A condition for the existence of p-blocks of defect zero, Proc. Symposia in Pure Math. 47 (1987).

[19] J. P. Zhang, On the existence of p-blocks of defect zero (in Chinese), Acta Math. Sinica, 30 (1987).

[20] J. P. Zhang, p-Regular orbits and p-blocks of defect zero, Comm. in Algebra 20 (1993).

[21] J. P. Zhang, Studies on defect groups, to appear in J. Algebra.

[22] J. P. Zhang, On finite groups all of whose p-blocks are of the highest defect, J. Algebra 118 (1989).

[23] J. P. Zhang, Complex linear groups of degree at most p-1, Contemp. Math. 82 (1989).

[24] J. P. Zhang, On linear groups at most $|P|-1$, to appear.

[25] J. P. Zhang, On linear groups over finite fields, Proc. Amer. Math. Soc. 110 (1990).

[26] L. W. Zhang, Some studies on block theory (in Chinese), Doctoral Thesis, Peking University 1987.

[27] R. Brauer, Blocks of characters and structures of finite groups, Bull. (N. S.) Amer. Math. Soc. 1 (1979), 21-38. 这是R. Brauer 逝世前一年的一次报告的改写稿.

[28a] M. Hall, Jr., A search for simple groups of order less than one million, Computational Problems in Abstract Algebra, Pergamon. Press, New York, 1969, 137-168.

[28b] M. Hall, Jr., Simple groups of order less than one million, J. Algebra 20 (1972), 98-102.

[29] Yun Fan, Local characterizations of block covers and their applications, J. Algebra, 152 (1992), No. 2, 397-416.

[30] Yun Fan, Remarks on Brauer correspondences, J. Algebra, 157 (1993), No. 1, 213-223.

[31] Zhang Guangxiang, On the block algebras having only one irreducible module, Chin. Ann. Of Math. 14B: 2 (1993), 209-212.

有限元方法在中国

石钟慈　　林　群
（中国科学院）

本文介绍冯康教授及部分后继者在有限元方向上的工作.

冯康在 1965 年中国《应用数学和计算数学》杂志上发表的二十五页长文，使他有资格进入国际有限元的先驱者之列. 这篇文章区别于一般的数学文献（包括现在被列为开创性的 Courant 论文）在于只有它才真正认识到这一方法对偏微分方程的现代计算所带来的全方位变革和深刻影响.

冯康的这篇论文已成为国际计算界的共同财富，并确定了我国计算数学发展的道路——由经典的计算数学转到现代科学计算的轨道上.

事过 30 年，重读这篇论文，仍有感触. 例如，他三十年前提出的网格局部加密方法，仍是今天处理奇性的普遍方法.

冯康对于无限元、边界元、人工边界法等也都有独特的见解和开创性的研究（见《冯康文集》，国防工业出版社，1994，北京）.

他在我国有众多的后继者，也包括在国外工作的我国青年一代的计算数学家. 以下我们仅就个别人工作范围，介绍国内在有限元方向上的一些工作.

一　非协调元

以位移法为基础的有限元可划分为两大类：一类是有限元空间包含在原问题的解空间中，称之为协调元. 60年代中后期，数学家和工程师分别建立了协调元的收敛性理论. 开头所说，冯康1965年的工作，就属于国际先驱者之列.

对于四阶椭圆边值问题，例如板弯曲问题，协调元要求插值多项式为C^1-连续，这是一个很强的限制. 例如，对于三角形单元，必须采用18个参数的五次多项式（不考虑所谓组合单元），这使得离散问题的规模大，结构复杂，解算费时.

与协调元相对的另一类有限元，称为非协调元，它放松了对有限元空间连续性的要求，使得单元构造变得灵活多样，出现了一些高效的板单元，为工程计算界所重视. 但非协调元的收敛性问题没有得到很好解决，远没有协调元那么简单统一.

70年代初，Irons根据力学想法提出了所谓"小片检验"(patch test)，这是一种简单易行的检验非协调元收敛性的准则，在多数场合行之有效. Strang随后给出这个准则的数学形式，并声称这是收敛性的充要条件. 80年代初，Stummel首先举出反例，证明"小片检验"不是充分的，接着石钟慈也举出反例，证明它也不是必要的. 特别是对四边形Wilson元，石钟慈指出，只要四边形两个对角线中点的距离加以一定的限制，即使它不通过"小片检验"，有限元解仍然收敛，对另一类Sander & Beckers四边形元，同样结论亦成立（石钟慈，1984）. 通过计算Stummel反例中有限元解的具体表达式，石钟慈发现，这个有限元解是有极限的，但它不是问题的真解（石钟慈，1984）. 这种奇特的错向收敛现象，在别的非协调元中也被发现（石钟慈，1985，蔡伟，1986）. 1986年，Taylor等对"小片检验"的提法作了修正，希望它能排除已

被指出的漏洞，但石钟慈又举出反例，证明修正后的“小片检验”仍旧不是充分的（1989）.

为了摆脱“小片检验”所遇到的困难，Stummel 从数学上提出了“广义小片检验”，作为非协调元收敛的充要条件. 这种检验方法在理论上是严格的，但要求使用者有相当的数学修养. 考虑到这一情况，石钟慈提出“F—E—M 检验”，这是一个充分条件，理论可靠，使用方便（1989）.

在非协调元的发展史上，Zienkiewicz 不完全三次元起着重要作用. Irons 正是在分析此元的收敛性的基础上总结出他的著名的“小片检验”准则的. Zienkiewicz 元有一种特殊的收敛性质，即当所有三角形的三边平行于三个已知方向时，收敛性才有保证（1975）. 对其它的网格，如米字形，鱼骨形，大量实际计算表明，它是不收敛的. 石钟慈从数学上严格论证了这点（1984）.

为了消除 Zienkiewicz 元这种特殊的收敛现象，曾提出多种修正方案. 其中最饶有兴趣的是由工程有限元界元老 Argyris 于 1980 年创立的所谓 TRUNC 元，这是一种基于力学想法的非常规元，列式简单，不加网格限制，而且计算效果非常好. 受 Argyris 委托，石钟慈深入研究了 TRUNC 元的收敛性问题，他发现，TRUNC 元在数学上相当于在使用 Zienkiewicz 元作计算时，将某种数值积分用于刚度矩阵中由常应变项与三次项所构成的交叉项元素（1989）. 在此基础上，证明了 TRUNC 元对任何网格剖分都为收敛，并得到了误差估计式. 使用数值积分来代替原来的精确积分，人们引进了一种误差，这种人为引进的误差与 Zienkiewicz 元由于非协调性所固有的误差恰好相互抵消，至少主阶相消，从而使得原来不收敛的网格变成收敛，并且使收敛性得到大幅改善，这是将数学分析与工程计算相结合的一个典型例子. 此后，出现了一批分析各种非常规有限元的工作（石钟慈，陈绍春，1988—1994）.

工程力学家唐立民于 1980 年亦曾从不同的力学角度指出一

类非常规元，称为拟协调元. 张鸿庆和王鸣对这类元作了大量工作（1982—1986），给出了一般的数学理论（1991）.

二 无 限 元

在用有限元方法计算具有奇性的解时，常用的一个方法是奇性单元法，即在奇点周围使用与真解奇性相同的插值函数. Henshell，Shaw Barsoum 等发现，在通常的等参数单元上，只要把插值点移动 1/4，即成为一个计算裂纹的奇性单元. 这种单元由于它很简单，又能与通用的程序相容，因此被广泛应用. 不久以后，Hibbitt 写了一篇文章，他的结论是这种单元的应变能为无穷大，而且除两条边界线外，沿其它方向的奇性也不对，这样的性质当然是不能接受的. 等参数奇性有限元的应用因此被蒙上了一层阴影. 应隆安在 1982 年发表的两篇文章中指出，Hibbitt 的结论是错误的，并且给了一个判别法. 用它检验了已知的各种单元，并且由此找出了一批奇性单元.

对于奇性计算，更为系统的工作是无限元方法，它是有限元方法的一个补充与发展. 几乎同时，在国外有 Thatcher（1975），在中国，有应隆安、郭仲衡、韩厚德，也还有冯康，开展这一方法的研究（1977），现在理论上已比较完整，应用也日益广泛，对此理论的大部分，已由应隆安写成专著（1992），并译成英文出版，P. D. Lax 写了序言. 在无限元方法中，原区域被分割成无限多块小片，这导致了一个含有无穷多个未知数的无穷多个方程的方程组，但是当原问题中存在有某种比例性质时，用分析的技巧可以把上述方程组归结为一个有限的方程组. 为了解这种方程组，描述了多种多样的有效的方法，其中韩厚德、应隆安提出的快速迭代法（1979）已成为无限元方法中最基本的、最有效的方法，并且也可用于求解由其他问题中得到的具有某种特性的无穷阶代数

方程组.

理论上，在解有奇性时，如用常规的有限元方法而不作处理，精度会降低. 而无限元方法的精度不受奇性影响，甚至还可以证明无限元方法具有超收敛性（许进超）. 更为深入的一个结果是：无限元解可以在奇点附近象精确解一样作展开，每一项都收敛于对应项. 与一些处理奇性的方法相比，无限元方法的一个优点是它不需要事先知道解的解析表达式.

应用上，无限元方法已成功地用于断裂力学和水文地质，还可用于医学等其他领域. 此外，韩厚德还将无限元方法应用于内界面问题（Interface Problem）和特征值问题，得到了无限元近似解的误差估计（1982，1983）. 为这两类问题的数值解提供了新的有效的计算方法.

三　边界元方法及人工边界法

在处理无界区域及含断裂、凹角区域时，也可以使用边界元方法，它是将偏微分方程的各种边值问题归化为边界上的积分方程，然后再利用各种离散化方法去求解. 它的最大优点是将所提问题的维数降低了一维. 由于有限元方法的成熟，人们将有限元技术与边界归化理论结合起来使边界元方法在工程技术界得到了广泛的应用. 在这个研究方向上，冯康的自然边界归化（1980）属于国际先驱者之列，对此，余德浩已写成专著（1993）. 韩厚德对双层位势的微商进行了系统深入的研究. 对二维、三维 Laplace 方程、Helmholtz 方程、线性弹性力学方程组等的双层位势的微商得到了新的表达式，从而可将相应的偏微商得到了新的表达式，从而可将相应的偏微分方程（组）的 Neumann 问题归化为保持自伴特性的边界积分——微分方程组，它的积分核只含有弱奇性，韩厚德对这类积分——微分方程组建立了严格的数学理论和数值方

法（1988，1993，1994），他进一步应用双层位势的新的表达式，将 Signorini 问题等变分不等式归化为边界变分不等式，提出了求解变分不等式的新的边界元方法（1987，1990，1991，1992，1994）．韩厚德、关治、何滨（1994）还给出了求解 Steklov 特征值问题的边界元方法．

在处理无界区域或外问题时，也可以使用人工边界法．冯康在这方面的工作也属于国际先驱者之列．

韩厚德、巫孝南深入研究了无界区域上的有限元算法（1985，1992）．特别对二维 Laplace 方程线性弹性力学方程组、Stokes 方程组的外问题，引进了圆周形状的人工边界，在人工边界上找到了外问题的准确边界条件，可将上述各种外问题归化为有界区域上的问题，并保持与原始问题有很好的近似性，上述方法在应用上十分简便、有效．

四　有限元离散化的效率评估和提高

一般采用保守（即最坏情况下）的评估，结果，许多有限元被判为低效率．典型的说法有几例：

i）对于一阶双曲型方程：线性元只有一级的精度；

ii）对于二阶椭圆型方程：线性元只有一级精度的能量和二级精度的特征值，有的混合元[①] 只有二级的精度．

iii）对于重调和方程：有的混合元[②] 的矩量甚至不收敛，有的协调元[③] 只有三级精度，有的非协调元[④] 只有二级精度；

---

① 指 Raviart-Thomas 元；
② 指 Herrmman-Miyoshi 元；
③ 指 Bogner-Fox-Schmit 元；
④ 指 Adini 元；

iv）对于 Stokes 方程：某些混合元[⑤]只有一级或二级的精度.

以上估计对于任意（包括最坏）的网格成立. 可是，所谓任意，只是一种理论说法，实际用的只有具体指定的网格，它不一定是最坏的，甚至是很好的（至少有一部分如此）. 所以，以上的评估方法并不公正.

矫枉必须过正. 让我们考虑最佳情况——矩形网格（甚至均匀）以及真解光滑，看看上述估计会有什么变化. 我们的结论（1990—1992）：

矩形网格能使 i）—iv）中各种有限元离散化的效率（或精度）提高一个到两个数量级（例如 iii）中混合元的矩量不再不收敛，而且具有二级精度）.

当然，矩形网格不能适应一般的区域. 但是，可以考虑一部分矩形的网格——包括非耦合及一些自适应网格[⑥]，后者适应于有奇性的解以及曲边区域. 这时，离散化精度也有数量级的提高（即使只有半级）.

我们还可以考虑接近于矩形的网格——适应于任意（凸）四边形区域，以及分片接近于矩形的网格——适应于多角形区域以及曲边区域. 也可以考虑分片均匀的三角形网格.

这些好的、接近好的、部分好的或者分片好的网格，都能使有限元离散化的精度得到数量级的提高.

因此，原来被判为低效率的有限元，只要为它们创造好的网格，便可以转化为高效率的有限元.

下面对上述现象的数学依据略作解释. 我们取 Poisson 方程及线性元为例.

有限元解相象于真解的插值，但又不是插值. 真解、有限元解和插值这三个向量，又形成一个直角三角形，有

---

⑤ 指 Q_1-Q_2 元，Bernadi-Rangel 元及 Q_2-P_1 元.

⑥ 例如冯康在 30 年前提出的网格

斜边：插值误差；

长边：有限元误差；

短边：有限元和插值之差.

勾股定理说：$(长边)^2=(斜边)^2-(短边)^2$，可是，人们忽视了这个公式及短边，只看到长边小于斜边（即有限元误差小于插值误差）. 与此相反，我们则充分利用这个公式及短边.

这一条短边究竟短到什么程度（无穷小的级别）？这个问题跟有限元采用网格的方向数目密切相关. 以下，我们考虑有两个、三个和四个方向数的网格：

i）两个方向：矩形网格，以及接近于两个方向的网格；

ii）三个方向：均匀三角形网格，以及接近于三个方向的网格；

iii）分片属于 i）或 ii）的网格；

iv）大多数网格属于 i）或 ii）的；

v）四个方向：例如米字型，打叉型，鱼骨型网格.

我们的结论：

网格	短边程度（无穷小级别）
i)，ii)，iii)，鱼骨型	2 级
iv)	1.5 级
米字型，打叉型	1 级
	2 级，当解调和

证明大意：将短边程度化成斜边积分，然后查看我们 1990—1992 间泡制的“斜边积分表”，便可得出短边程度，或者说，斜边积分决定了短边程度. 这里的斜边积分又可以归结为多项式的积分，原则上可由机器判断（吴文俊方法）.

由上表可见，网格的方向数对于短边的程度很敏感.（但是，无论那一种网格（如米字型），从数值试验看，短边总比长边短）.

如果一种网格能使短边达到较高级的程度，例如均匀三角形，便称最优网格；反之，例如米字型网格，便是非优网格. 注意，斜

边（即插值误差）对于网格属于均匀三角形或米字型并不敏感，因此，依据勾股定理，长边跟短边的程度成反比. 结果，对于有限元误差来说：

网格	有限元误差
i）-iv），鱼骨型	稍大
米字型，打叉型	稍小

特别地，

米字型网格比均匀三角形网格好.

一般地说，非优网格反而比最优网格好. 岂不奇怪？无论如何，这也是网格的一种评估方法.

要为最优网格平反：我们可以对有限元解作加工，使得加工有限元的误差和短边程度不再成反比，而是成正比. 于是，最优网格又比非优网格好多了：

<table>
<tr><th>网格</th><th>加工有限元误差</th></tr>
<tr><td>i）-iii），鱼骨型</td><td>2 级</td></tr>
<tr><td>iv）</td><td>1.5 级</td></tr>
<tr><td rowspan="2">米字型，打叉型</td><td>1 级</td></tr>
<tr><td>2 级，当解调和</td></tr>
</table>

可见，网格的方向数，对于加工有限元的误差很敏感. 这是网格的另一种更有用的评估方法.

但是，无论哪一种网格（例如米字型），从数值试验看，加工有限元总比不加工好.

以上的解释是以 Poisson 方程及线性元为例. 重要的是：对于其它方程（包括一阶双曲、重调和、Stokes 方程、多种积分微分方程、特征值问题、非定常问题、通量计算）以及若干有限元（例如高次元、混合元、稀疏元），从“短边”（即有限元和插值之差）出发，总能使离散化效率提高一个到两个数量级，只要网格

适当．其根据还是：将短边程度化成斜边积分，然后查看我们1990—1992间发表过的“斜边积分表”，便能确定短边程度．可以这么说，整个理论只剩下一张“斜边积分表”了．

以上属于协调有限元．关于非协调元，参见第一段石钟慈的工作．这里举出他研究过的两个特例：Wilson（W）矩形元和Carry（C）三角元．

这两个非协调元W和C虽然不含在H_0^1-空间中，但是它们分别包含了协调的双线性元空间Q_1和线性元空间P_1，所以W或C可以分别投影到Q_1或P_1上．结果，后者（投影）恰为前者（W-解或C-解）的插值（相当于“短边”等于零），特别，前后两者在网格结点上相同，即W-解或C—解在结点上分别就是双线性元解或线性元解，而后两者已在前面研究透了．

还有一个非协调元的例子：求解重调和方程的Adini矩形元，仍然考虑“短边”，并继续应用“斜边积分展开式”，但加上一个“长边积分展开式”，也能得出“短边展开式”，从而获得外推有限元比不外推高出两个数量级．

非耦合低高元也能有整体高精度．

所以，“短边”原则以及“斜边积分手册”（1990—1992）对于提高各种有限元离散化的效率是关键．

以上理论有其来源，包括表面上相距颇远的工作．所以涉及的人太多，都列出他们，名单太长，只好割爱不列．

数学史研究在中国

李文林

（中国科学院数学研究所）

1935 年中国数学会成立时，以现代科学方法为基础的数学史研究在国内已获开展，其先驱者是李俨（1892—1963）和钱宝琮（1892—1974）．李俨，福建闽侯人，唐山路矿学堂肄业后长期从事铁路工作，业余研究数学史，1916 年发表首篇论文（《中国数学史余录》）．钱宝琮，浙江嘉兴人，早年留学英国，毕业于伯明翰大学土木工程系，1912 年回国后投身大学数学教育，“五·四”运动前后开始研究中国古典数学并于 1932 年出版了《中国算学史》（上），这也是由我国学者撰写的第一部中国数学通史*．李、钱二位学者的数学史创作各跨越了约半个世纪，他们的著述许多已成为中国古代数学史研究的经典文献．正如华罗庚所说的那样“我们今天得以弄清中国古代数学发展的面貌，主要是依靠李俨先生与钱宝琮先生的著作．”李约瑟博士在《中国科学技术史》数学卷中也指出：“在中国的数学史家中，李俨和钱宝琮是特别突出的．”李约瑟同时还提到：“严敦杰的论文，我们也要经常引用．”严敦杰（1917—1988），也是浙江嘉兴人，1936 年开始发表数学史论文，在随李俨、钱宝琮之后对中国古代数学开展研究的早期学者（其他尚有张荫麟、章用、许莼舫等）中，他是成就最著的一

* 这里值得一提的是，钱宝琮作为数学教育家与数学史家，在中国数学会的筹建中起了积极作用．他出席了中国数学会第一次年会，在会上宣读了数学史论文“汪莱的方程式论研究”，并当选为中国数学会第一届评议会评议．

位.

50年代以前，我国的数学史研究基本上是人自为战，分散进行. 这种状况随着1957年中国科学院自然科学史研究室的成立而获改变. 该研究室由李俨任主任，李俨、钱宝琮任研究员，同时到该室主攻数学史的尚有严敦杰、杜石然、梅荣照等. 李迪、梁宗巨、白尚恕、沈康身等也于这一时期开始投入数学史研究. 至60年代中，中国数学史研究可以说成绩斐然，但不幸因“文化大革命”而中断.

从70年代开始，我国数学史研究进入了新的时期. 在这一时期，数学史作为一门独立的分支学科得到了迅速、全面的发展. 首先是研究队伍的壮大. 1975年，中科院自然科学史研究室扩建为自然科学史研究所，设数学史组，成员有所增加. 大约同时，中国科学院数学研究所以及高等院校有一批学者也加入了数学史研究的行列. 特别是吴文俊院士自1975年开始发表一系列数学史论述，产生了广泛影响. 80年代，数学史研究力量又有进一步加强. 除中科院自然科学史研究所外，辽宁师范学院、北京师范大学、内蒙古师范学院、西北大学等相继成立以数学史为主要方向的研究机构. 特别是1981年以来，国内培养的数学史硕士生（约50名）、博士生（6名）有相当一部分已成为数学史研究与教学的骨干. 目前全国以数学史为主的研究人员已达70余人，这里不能一一列名.

数学史研究的方向与领域在70年代以来也有了很大的扩展. 除中国古代数学史以外，世界数学史尤其是近现代外国数学史研究已得到开拓，这与以往相比是一个重要的转变. 中国数学史本身的探讨范围也有了明显的延伸. 在时代上，以往基本空白的中国现代数学史研究已经起步并顺利开展. 在地域上，对少数民族地区数学史料的发掘研究也受到了一定关注.

随着研究规模与广度的扩大，数学史研究在许多方面向纵深推进，特别是一些重大课题的研究趋于系统化与深入化. 例如80

年代以来，国内数学史界先后自发地集中研讨了《九章算术》与刘徽、秦九韶与《数书九章》以及明清数学史等，高潮迭起，成果累累．另外，作为数学史研究的基本建设，对数学原始文献资料的整理、研究也比以往受到更大的重视．

由于数学史学科的发展，1981年成立了中国数学会数学史分会，先后召开了四次全国数学史年会(大连，1981；呼和浩特，1985；合肥—宣城，1988；北京，1994)，其它各种形式的学术交流频繁．近年来台湾的数学史研究取得可喜的进展，海峡两岸数学史学者的学术交往也已顺利开展．

中国数学史

我国在中国数学史研究方面享有很高的国际声誉，如前所述这在很大程度上是由于李俨、钱宝琮的奠基性工作．他们的著作长期以来一直被当作权威性论述而广为引用．二位学者大量深入的专题研究各有文集汇编[1,2]．他们的代表性专著则主要有：《中国古代数学史料》(李俨，1954)[3]、《中算家的内插法研究》(李俨，1957)[4]、《中国数学史大纲》(上)、(下)(李俨，1958)[5]、《中国数学简史》(上)、(下)(李俨、杜石然，1964．英译本：Oxford，1987)[6]、《算经十书》(上)、(下)(钱宝琮校点，1963)[7]、《中国数学史》(钱宝琮主编，1964)[8]、《宋元数学史论文集》(钱宝琮主编，1966)[9]等．

李俨、钱宝琮开创的现代形式的中国数学史研究，自本世纪初以来已历经约八十年，即除李、钱二位的工作以外，这一领域研究成果、论著之丰，亦不胜枚举．以下只能按笔者认为最重要的专题加以略述，挂一漏万，在所难免．

《九章算术》与刘徽　由于《九章算术》在世界数学史上的地位，这方面的研究意义重大．李俨、钱宝琮对《九章算术》与刘徽注都作过基础性研究．50年代以来，《九章算术》及相关的魏晋

南北朝数学研究进展甚大，对包含在《九章算术》及其注文中的中国古代数学卓越成就如正负术、方程术、开方术、割圆术与圆周率、盈不足术以及面积、体积理论等，多有阐发、诠释，其中尤以对割圆术与圆周率，方程术、祖暅公理以及吴文俊关于出入相补原理等研究影响最著. 80 年代以来，《九章算术》与刘徽研究似有集大成之势，仅新发表的《九章算术》校勘、注释就有三种以上[10]、[11]、[12]. 另外，研究文集[13]也汇集了这一时期关于《九章算术》与刘徽研究的有价值的成果.

宋元数学 60 年代以前对宋元数学研究的代表性著作是钱宝琮主编的《宋元数学史论文集》，其中包含了钱宝琮、严敦杰、杜石然、梅荣照、白尚恕等对宋元四大数学家秦九韶、杨辉、朱世杰、李冶等数学成就的深入研究. 80 年代，宋元数学再度成为研究热点，对大衍求一术、正负开方术、天元术、四元术与招差术等都有新的论述提出. 研究文集[14]汇集了这一时期对秦九韶及其《数书九章》的部分研究成果. 宋元数学是中国古典数学的高峰，这方面的研究尚有很大余蕴.

明清数学 明清数学的研究以往比较薄弱. 80 年代以后这方面研究数量、质量均有明显改善，对梅文鼎、李善兰、程大位、徐光启、项明达、明安图、汪莱、李锐、年希尧等数学家的成就都有新的研究. 研究文集[15]汇集了这方面的部分成果. 另外，对中国珠算史的研究也值得注意.

中国古代数理天文学 中国古代数学的发展与天文历法有特殊的联系，对此李俨、钱宝琮都有不少论证及猜测. 严敦杰对中国古代历法中数学问题的研究独具功力. 80 年代以后，对中国古代历法上元积年计算的探讨、对中国古代历法中内插法的来源及数理基础的考察等研究也引人注目.

中国古代数学文献的校勘、整理 钱宝琮校点《算经十书》在国内外有很大影响. 80 年代以来，除前述《九章算术》的校勘、注释外，这方面较重要的工作有《算法流宗》的校释[16]、《中国科技

典籍通汇·数学卷》[17]等等.

中国现代数学史 这方面的研究近十年间在众多数学家的呼吁推动下已顺利起步并走上正轨. 从现代中国数学家传记[18]、[19]、[20]、数学机构与学会团体的历史等入手，由点到面，逐步深入. 科学出版社的大型传记[18]凡六卷已全部出版，其中发表了 60 位最有影响的中国现代数学家传记. 王元院士对华罗庚生平、成就的研究也已产生广泛影响. 此外一些学者开始了编写中国现代数学通史的尝试[21].

世界数学史

1925 年，商务印书馆出版的卡约里（F·Cajori）《初等数学史》(曹丹文中译)可能是我国最早翻译介绍西方数学通史的著作. 1956 年斯特洛伊克（G. D. Struik）的《数学简史》被译为中文(关娴译)，关肇直为该书写的前言论述了研究世界数学史的意义与方法. 梁宗巨也是国内较早关注世界数学史研究的学者. 但总的来说，70 年代以前我国世界数学史的研究还十分薄弱. 这种局面从 70 年代后期才开始扭转.

针对以往基础较差的情况，首先翻译介绍一批优秀的外国数学史著作十分必要. 在已经翻译出版的数学通史中，影响最大的是克莱因（M. kline）的《古今数学思想》[22]. 该书由北京大学数学系数学史翻译组译. 此后出版的西方数学通史译著较重要的还有：斯科特（Scott）《数学史》[23]、伊夫斯（H. Eves）《数学史概论》[24]等.

在翻译外国数学史著作的同时，我国学者也开始撰写自己的数学史著作. 第一部这样的著作是梁宗巨的《世界数学史简编》[25]. 近年来我国学者编写的数学通史较多，其中大多数是作为高等院校数学史教材（[26]等），这里不能一一列举.

深入的专题研究是数学史领域经常和基本的工作，也是产生优秀、独到的数学通史的前提. 国内这方面发展较快的是对历史上占重要地位的数学家和数学学派的研究. 数学学派是近年来西方数学史界关注的热点之一，我国学者从70年代末开始对哥廷根学派、布尔巴基学派、剑桥学派等的研究是有意义的. 对重要数学家生平、工作与思想的研究成果也很丰富，这方面的代表作有《世界著名科学家传记·数学家》[27]，该书凡六卷收载了147位著名数学家的传记，编纂工作前后历时十年，其中有不少传记是在深入研究基础上写出.

其它专题研究如数学各分支学科发展史、断代史、国别史等也有了良好开端. 据了解，已在微积分、解析几何、非欧几何、群论与代数、数理逻辑与集合论、数论、计算机等方面开展了研究. 对欧几里得《原本》的研究、20世纪数学史研究等也值得一提. 此外，对巴比伦数学、古代印度与阿拉伯数学、希腊古典数学和日本数学等也都有人从事研究，但尚需克服语言困难，以求深入.

外国数学原著是世界数学史研究的基础，过去国内很少出版这方面的史料. 中国科学院数学研究所数学史组与自然科学史研究所数学史组联合编译的《数学史译文集》和《续集》[28]、[29]，是向国内学术界提供西方数学原始资料的一种尝试，其中包括有希尔伯特《数学问题》、F·克莱茵《埃尔浪根纲领》等有划时代意义的文献. 此后，数学原始文献的翻译、整理工作有所开展，陆续出版的重要原著有欧几里得《几何原本》[30]、笛卡儿《几何》[31]等. 但这方面的工作还亟待各方面协力推进.

总之，世界数学史的研究在我国可以说是从无到有地建立起来，并显示出其对数学研究与教学的现实意义，今后应继续加强.

参考文献

[1] 李俨：中算史论丛 1—5，科学出版社，1954—55.

[2] 中国科学院自然科学史研究所编：钱宝琮科学史论文集，科学出版社，1983.

[3] 李俨：中国古代数学史料，中国科学院，1954.

[4] 李俨：中算家的内插法研究，科学出版社，1957.

[5] 李俨：中国数学史大纲上、下，科学出版社，1958.

[6] 李俨、杜石然：中国古代数学简史上、下，中华书局，1964.

[7] 钱宝琮校点：算经十书上，下，中华书局，1963.

[8] 钱宝琮主编：中国数学史，科学出版社，1964.

[9] 钱宝琮主编：宋元数学史论文集，科学出版社，1966.

[10] 白尚恕：《九章算术》注释，科学出版社，1983.

[11] 郭书春汇校：《九章算术》，辽宁教育出版社，1990.

[12] 李继闵：《九章算术》校证，陕西科学技术出版社，1992.

[13] 吴文俊主编：《九章算术》与刘徽，北京师范大学出版社，1982.

[14] 吴文俊主编：秦九韶与《数书九章》，北京师范大学出版社，1987.

[15] 梅荣照主编：明清数学史论文集，江苏教育出版社，1990.

[16] 梅荣照、李兆华：《算法统宗》校释，安徽教育出版社，1990.

[17] 郭书春、王渝生、韩琦等编：中国科技典籍通汇·数学卷（一）—（五），河南教育出版社，1993.

[18] 卢嘉锡主编：中国现代科学家传记第一集—第六集，科学出版社，1991—1994.

[19] 程民德主编：中国现代数学家传第一卷，江苏教育出版社，1994.
[20] 王　元：华罗庚，开明出版社，1994.
[21] 张奠宙：中国现代数学史略，广西教育出版社，1993
[22] M. 克莱因：古今数学思想一、二、三、四，(北京大学数学系数学史翻译组译)，上海科学技术出版社，1979—1981.
[23] J.F. 斯科特：数学史，(侯德润译)，商务印书馆，1981.
[24] H. 伊夫斯：数学史概论(欧阳绛译)，山西人民出版社，1986.
[25] 梁宗巨：世界数学史简编，辽宁人民出版社，1980.
[26] 袁小明、胡炳生、周焕山：数学思想发展简史，高等教育出版社，1992.
[27] 吴文俊、梁宗巨、李文林、邓东皋等编：世界著名科学家传记·数学家Ⅰ—Ⅵ，科学出版社，1990—1994.
[28] 中国科学院自然科学史研究所数学史组　中国科学院数学研究所数学史组：数学史译文集，上海科学技术出版社，1980.
[29] 同上：数学史译文集续集，上海科学技术出版社，1985.
[30] 欧几里得：《几何原本》，(兰纪正、朱恩宽译)，陕西科学技术出版社，1990.
[31] 笛卡儿：《几何》，(袁向东译)，武汉出版社，1993.
[32] 莫德主编：欧几里得《几何原本》研究，内蒙古人民出版社，1992.
[33] 胡作玄：布尔巴基学派的兴衰，知识出版社，1984.
[34] 李迪：中国数学史简编，辽宁人民出版社，1984.
[35] 沈康身：中算导论，上海教育出版社，1986.
[36] 华印椿：中国珠算史稿，1987.
[37] 杜石然主编：中国古代科学家传记上、下，科学出版社，1992.
[38] 阿米尔：中国数学史（哈萨克文），新疆科技卫生出版社，1994.

Fuzzy 拓扑在中国

刘应明

（四川联合大学）

一 模糊性，层次与序结构

著名控制论专家、美加州贝克莱大学 L. A. Zadeh 教授于 1965 年提出了模糊（Fuzzy）集理论[1]. 这样，以严谨著称的数学在经历了确定性与随机性的两个阶段之后开始进入昔日的禁区——模糊性的研究，力图在信息不充分，不精确，不完备的情况下，处理模糊信息，得出确定性的结论.

模糊性绝非有些人理解的那样是“糊里糊涂”性. 自然语言本身具有很大模糊性. “今天天气好”，是一个不精确的句子，但却有大的包容量，你听后就可决定访友或作其它事情；所以模糊性有时是信息浓缩所致，是提高信息交换效率的需要. 较之电脑，人脑的优势之一就是能处理模糊信息，进行高层次的信息分析与决策. 各种各类专家的高明之处也在于此. 概念是可以用其外延来描述的，即在所讨论的范围（论域）X，给出一个子集 A，一个对象 x 是否为概念所界定，就看 x 是否属于 A；如用 A 的特征函数 f 来描写，就看 $f(x)$ 是否为 1（否则为 0），所以一个概念就是从 X 到二元集 $\{0, 1\}$ 的一个映射. 所谓概念的模糊性就是其外延的不清晰性，即 x 关于 A 的属于关系不是非 0 即 1，而是有

一个程度，例如70%．如果再用特征函数来描叙，这时 $f(x)=0.7$．所以一个模糊概念对应于一个广义特征函数：$X\to[0,1]$．这样，特征函数的值域从 $\{0,1\}$ 扩充为 $[0,1]$，我们就描述了概念的模糊性．论域 X 上一个模糊（子）集就是 X 至 $[0,1]$ 的一个映射 f；$f(x)$ 称作 x 的隶属度．这是 Zadeh 引进的定义．我们把隶属度都大等于 a（$a\in[0,1]$）的对象全体，即 $\{x\in X: f(x)\geq a\}$称作概念 f 的 a 层次，常记作 f_a．从数学上看，模糊集较通常集多了非平凡的层次结构，这是模糊数学在结构上最大特点，概念的模糊性正是由概念结构中层次性来表现的．

应该指出，Zadeh 定义的核心是给出隶属度大小顺序这种序关系的一种实数化方法．涉及实际问题时这种量值化方法常常并不唯一的．对数值这种处理有时是更能反映专家的经验．这或许正是模糊技术产业成功的一个原因．还应该指出，两个隶属程度在实际问题中不一定可以比较顺序优劣的，对于“好房子”概念来说，某两所房子可能各有千秋；也就是说，隶属程度之集合——值域选作 $[0,1]$ 还有局限性，严格说它应是一个偏序结构，例如格 L．因此，Goguen 把 X 至一个格 L 的映射称作 L-模糊集，简称之为模糊集．

从数学上看，我们把值域 $\{0,1\}$ 扩充为 $[0,1]$ 甚至格 L，丰富了子集合的概念．大家知道集合论是现代数学的根基，而这种根基上的变化，势必影响到数学许多分支的发展，X 上全体 L-模糊集记作 L^X，那么与在子集合 2^X 上展开的经典数学相较，模糊数学是在 L^X 这更广的集合框架上展开的．另外，由于 L^X 本身还可从 L 上引出格的结构，所以可以进一步说，在 L^X 上展开的模糊数学的特点是强调序结构的．还应指出，框架从 2^X 变为 L^X，其逻辑背景则相应地从二值的形式逻辑变为格值逻辑，后者常常不再保持排中律．

二　格上拓扑学——locale 理论与 Fuzzy 拓扑学

作为数学的两个分支，拓扑与格论在其方法与思想上早已相互影响，交互作用. 30 年代关于分配格的拓扑表示的 Stone 定理即是著名例子. 到了 50 年代末，Ehresmann[2]认为具有某种分配性的格应作为广义拓扑空间加以研究. 经过他的学生及剑桥学派的努力，这种把拓扑与序结合起来的并称之为 Locale 的数学理论已蔚为大观[3]. Locale 论是一种格上拓扑学，其特点是无点化，与其直觉逻辑（数理逻辑一大流派）的背景相应，强调构造性方法. 另一方面，以模糊性数学处理为背景，在格 L^x 上展开的拓扑学是另一种格上拓扑学——Fuzzy 拓扑学（或称作不分明拓扑学），其特点是有自然的点状结构与层次构造. Fuzzy 拓扑空间是 1968 年引入的[4]. 我国在 1974 年于四川大学（现在的四川联大）开始这方面研究的[5,6]. Fuzzy 拓扑学的背景与方法论与 Locale 论有所不同，但毕竟都是格上拓扑学；因而，例如 Fuzzy 一致结构等方面深刻工作[7]就借鉴了 Locale 论的成果，并形成了 Fuzzy 拓扑中无点化方向. 反过来，Fuzzy 拓扑中有点化流派的形成与成熟，又为 Locale 论中长期未决的问题提供了新的方法[8—11]. 可以说 Fuzzy 拓扑学的研究把 Ehresmann 倡导的格上拓扑学推向了新的阶段.

三　邻近构造、择一原则与有点化流派

在 Fuzzy 拓扑中，不少早期的工作是平行性的推广. 但这条路走得不远，即遇到很大困难. 例如，沿用复盖式的紧性定义导致了几乎最简单的 Fuzzy 拓扑空间却不是紧的荒唐结果. 现在已经明白，问题出在拓扑学中最基本的邻近构造上. 在 Fuzzy 集论中，

Fuzzy 点的引入尽管很自然，但由于层次存在，却破坏了十分基本的"择一原则"：一个点邻属于若干集合的并集，则它必也邻属于其中某个集合. 这导致传统的邻域系不能简单的移用. 合理的邻近构造的确立成为 Fuzzzy 拓扑发展的一个基本问题.

1975 年，对 $L=[0,1]$ 情形，作者提出一种崭新的邻近构造——重域系，解决了这个问题[5]. 对一般格 L，1984 年论文［12］使用闭集族对偶地给出了远域系.

我们定义 Fuzzy 点为仅仅在 x 中某点 x 处取非零值 λ 的 Fuzzy 集，记作 x_λ，点 x_λ 属于 Fuzzy 集 A，记作 $x_\lambda\in A$，当且仅当 $\lambda\leqslant A(x)$. 当值域 L 具有逆序对合对应 $'$ 时，A 的补集 A' 定义为 $A'(x)=(A(x))'$，那么，x_λ 重于 A，记作 $x_\lambda\leqslant A$，当且仅当 $\lambda\nleq A'(x)$ 且等价于 x_λ 远于 A'. 大家知道，拓扑中点的邻近构造可以分解为：

开集族十点与集的某种邻属关系$\lhd$. 例如当$\lhd$为$\in$，$\leqslant$等等时，相应地得到传统的邻域系，重域系等等.

在 1983 年，从集合论这个基础上，我们给出重于关系$\leqslant$的公理刻划，结论为[13]：

满足择一原则及若干平凡之要求（如点邻属于全空间）的邻属关系必定是重于关系. 这意味着，在我们时时碰到的邻域这类结构是由集论中择一原则决定的. 显然，只有在模糊数学这个更广框架 L^x 上，我们才能认识到这一实质. 这是 Fuzzy 集论的逻辑力量之表现.

应该指出，Fuzzy 点未必属于它的重域. 这似乎有点奇怪，不过在函数空间研究中，Fréchet 早在 1916 年就考查了不含相应点的邻近构造，尔后并由 Sierpinski 总结为（V）空间理论[14]. 不过，在那里，集与其补集要求不相交，这一对应排中律的基本性质在 Fuzzy 集论中，由于层次存在，不再保持，所以重域系与（V）空间理论完全不同.

由于反映 Fuzzy 集自身特点的邻近构造成功地建立，正如伦

敦数学会兰皮书 Aspects of Topology[15]及前苏联“数学进展”[16]所评，克服了 Fuzzy 拓扑发展中主要障碍. 中国学者在 Fuzzy 拓扑中有点化流派的形成起了奠基作用.

四　层次构造与格值 Hahn-Dieudonné 插入定理

对 Fuzzy 集 A 及其层次 $A_\alpha=\{x: A(x)\geqslant\alpha\}$ $(\alpha\in L)$，易有等式 $A=\vee\{\alpha A_\alpha: \alpha\in L\}$，反过来，其反问题是更有趣的：对 $\forall\ \alpha\in L$（或 L 某子集 L_0），给定一个 x 的通常子集 B_α. 那么，什么条件下，Fuzzy 集 $\vee\{aBa: a\in L_0\}$ 的 a 层次恰是 B_a 或能由诸 B_a 显式表出？这是一个序结构的问题，我们用连续格理论[17]中“定向小于”关系及相关极小族工作[18,19]给出了解答[20,21]. 进而，为了使得到的 Fuzzy 集（即映射）具有所要求的性质，对映射与层次之间拓扑结构亦应把握. 我们做到了这一点，从而成功地解决了 Hahn-Dieudonné 插入定理的格值化问题. 代替逐点确定函数，显示了逐层确定映射这一新方法之力量.

拓扑空间 X 至格 L 的映射 A 称作下（上）半连续的，若 $\forall\ \alpha\in L, A_\alpha(A^\alpha=\{x: A(x)\leqslant\alpha\})$ 是 x 中闭集，对于 Fuzzy 拓扑空间 (L^X,δ)，记其拓扑 δ 中所有正常集的集合为 $[\delta]$，那么 $(X,[\delta])$ 是一拓扑空间，称作 (L^X,δ) 的底空间. (L^X,δ) 称作满层的，若 δ 包含所有常值映射；(L^X,δ) 称作弱诱导的，若 δ 中每个元都是 $(X,[\delta])$ 至 L 的下半连续映射；(L^X,δ) 称作诱导的，若它是弱诱导与满层的. 这三种空间的拓扑（闭包）结构有着有趣的关系，通过下述的诸层次之闭包“连续逼近”空间之闭包的性态即可看出：

定理[21]　设 $a\in L$，$D(a)$ 表示 a 的一个极小族，(L^X,δ) 及其底空间的闭包运算分别记作 $^-$ 与 cl，那么

$$(L^X,\delta)\text{ 是}\begin{cases}\text{满层的,}\\ \text{弱诱导的,}\\ \text{诱导的,}\end{cases}\text{当且仅当}(\overline{A})_a\begin{cases}\subseteq\bigcap\{clA_b : b\in D(a)\},\\ \supseteq\bigcap\{clA_b : b\in D(a)\},\\ =\bigcap\{clA_b : b\in D(a)\},\end{cases}$$

$\forall a\in L, a\neq 0, \forall A\in L^A$.

在古典分析中，有著名的关于上半与下半连续函数之间是否有连续函数插入的定理；插入函数存在反映的是空间正规分离性[22]. 这一结果最终完成历时数十年，且插入函数之构成富有分析技巧. 现在考虑这个 Hahn-Dieudonné 插入定理的格值形式，则传统的逐点确定函数之方法恐怕不行；基于我们对层次间序及拓扑结构之深入把握，逐层归纳，得到所要求插入映射的各层次，从而给出插入映射：我们称 L 的子集 L_0 为（严格）并生成集，若 L 中任一元 a，皆可表成 L_0 中若干（严格）小等于 a 的元的并.

插入定理[21] 设 L 为完全分配格且具有可数的严格并生成集，(L^X, δ) 为诱导空间，则下列条件两两等价：

(1) 对底空间中下半连续映射 f 及上半连续映射 g，若 $g\leqslant f$，则存在连续映射 $h: X\to L$，使 $g\leqslant h\leqslant f$，即插入映射存在；

(2) $(X, [\delta]])$ 是正规的；

(3) (L^X, δ) 是正规的.

此外，若 L 仅有可数的并生成集（例如所有有限格皆无严格并生成集），上述(2)与(3)仍是等价的，但(1)与(2)一般不等价.

五　Fuzzy 嵌入理论，紧性与紧化理论

寻找性质良好的空间作为标准空间并求得较简单的分离性条件（如点与点之间的 T_1 性，点与集之间完全正则性等），使得满足条件之拓扑空间可嵌入至标准空间，从而自动地遗传有标准空

间的好性质，这就是拓扑空间中嵌入理论之目标. 现在 Fuzzy 集具有层次构造，分离性十分复杂. 此外，'已有完全正则性定义则是回避开点的概念，经由 Fuzzy 一致结构[7]方式来给出. 这种回避点的作法在嵌入理论中显然是不行的. 我们首先取研究得很透彻的 Fuzzy 单位方体为标准空间[23—26]（近来以其弱诱导化[27]为标准空间也有相似的研究[28]），其次对格上保并映射类的代数运算作了较深入研究之后[18,29]，给出了 Fuzzy 完全正则性的点式刻划并引入了次 T_0 分离性，最后成功地得到 Fzzy 一致结构的 Weil 定理，给出了 Fuzzy 嵌入理论[30]，这可算作综取 Fuzzy 拓扑中有点化与无点化流派之所长而得到之成果.

由于嵌入理论，度量化与紧化问题就可解决[31-39]. 限于篇幅，我们着重介绍紧性与紧化的成果.

紧性在 Fuzzy 拓扑中研究得很多. 我们已在前面也指出平移复盖式定义导致可笑的成果. 目前最成功的当推良紧性的工作. 从收敛入手，考虑到各个层次关系，就 $L=[0,1]$ 情形，论文[40]首先提出了良紧性概念. 继后，使用连续格理论，得出 L 为一般 Fuzzy 格情形下的良紧理论[41,42].

关于紧化问题，在相当长时间内，连 Stone-Čech 紧化最大性问题都不清楚. 实际上，在 Fuzzy 情形，情况是很不同的，利用嵌入理论及若干格论成果，我们在一个拓扑空间诸紧化中引进一个预序，我们证明它确不具有反称性，即一个 Fuzzy 拓扑空间允许有二个不同的极大紧化[37]；我们也证明 Stone-Čech 紧化可能不是最大的 Tychonoff 紧化[38]. 只要在适当分离性（所谓弱 T_2）条件下，这个预序才是偏序；同时这个 Stone-Čech 紧化才是最大紧化[39].

六 若干相关代数结果

格上拓扑的研究自然涉及到格的研究. 已经指出完全正则性

的点式刻划中，我们关于保并映射类的代数运算有趣的工作. 事实上这可归结为诱导映射研究与极小族的应用[43]，从而与 Galois 连络密切相关，并引起多值逻辑学家的兴趣.

我们对于格值半连续映射形成的空间作过若干深入的整体性质的研究. 大家知道，在分析中，半连续函数可用上下极限来描叙的. 在格值情形，证明情形仍然为真，即 A 为上半连续映射当且仅当对$\forall$ $x\in X$ 及 x 的每个邻域基 B，有 $A(x)=\bigwedge_{\sigma\in B}\bigvee_{y\in\sigma}A(y)$. 进而我们[44,45]证明了下列定理，说明这与值域 L 的完全分配性相关：

定理 设 L 为分配格，则下列条件等价：

(1) L 为完全分配格；

(2) 对任一拓扑空间 X，$f: X\to L$.

f 为上半连续当且仅当 $\forall\ x\in X, f(x)=\bigwedge_{\sigma\in B}\bigvee_{y\in\sigma}f(y)$；并且 f 为下半连续当且仅当 $\forall\ x\in X, f(x)=\bigvee_{\sigma\in B}\bigwedge_{y\in\sigma}f(y)$，这里 B 是 x 的任一邻域基.

此外，大家知道，半连续函数也可用阶梯函数来逼近，这一特征正如上述定理一样，也等价于 L 的完全分配性. 这样，把半连续性的分析刻划与代数中完全分配律连系起来了，有点令人意外.

在著名的拓扑问题书 [46] 中，关于相关偏序结构的问题有专章陈述. 设 X 为拓扑空间，其开集形成的格是连续格（即 X 为 core compact). 又设 L 为定向完备偏序集且是连续的，具有 scott 拓扑，那么 X 至 L 的全体连续映射集 $[X\to L]$ 在点式序下的序构造与拓扑构造是所谓 Domain 理论与范畴论都很注意的问题. [46] 中关于 $[X\to L]$ 中 Isbell 拓扑与 Scott 拓扑是否一致以及 $[X\to L]$何时成为连续的完备偏序集有 Lawson 与 Mislove 提出的两个问题. 这两问题从更近文献[47]中得知尚未解决. 我们举出反

例，说明两个猜测皆不真．并对 L 附加适当条件下，得到猜测成立的充要条件[48,49]．

限于撰文的性质与篇幅，本文只例举若干笔者认为在方法与结论上有代表性工作，真是挂一漏万．至于从 Fuzzy 拓扑发展起来的拓扑分子格论[50—54]以及对开集给出一个开的程度的描叙，引进另一种 Fuzzy 拓扑的工作[55]就更不论及了．1988 年出版的 Fuzzy 拓扑专著[56]及最近的综述[57,58]对我国学者工作介绍得较为完整，或可参阅．本文的介绍，除了前述的丰厚的实际背景外，希望能使读者了解到作为融序与拓扑两大数学结构于一体的 Fuzzy 拓扑的价值：它可加深我们对数学基本构造的认识（如邻近构造，择一原则）；可提供新的方法，推广经典结果，解决公开问题（如由层次决定映射的方法，格值 Dieudonné 插入定理，Lawson-Mislove 问题）；可在分析与代数之间发现意外的关系（如完全分配律的分析式刻划）；等等．它已经且将继续对连续格，交换代数等的研究深化以及层论，Topos 论等分支发展作出贡献．我国学者这方面工作已颇有影响，导致了有点化流派的产生并使其占据 Fuzzy 拓扑的中心位置．

参 考 文 献

[1] L. A. Zadeh. Fuzzy Sets. *Inform. and Control.* 8 (1965), 338—353.

[2] C. Ehresmann. Gattungen von lokalen structuren. *Jber. Deutch Math. Verein.*, 60 (1975), 59—77.

[3] P. T. Johnstone. Stone Spaces. Cambridge Univ Press. Cambridge, 1982.

[4] C. L. Chang. Fuzzy topological spaces. *J. Math. Anal. Appl.*. 24 (1968), 182—190.

[5] Bao-ming Pu and Ying-ming Liu, Fuzzy topology I. neighborhood structure of a fuzzy point. *J. Sichuan Univ.*. Natural Sci. Edition. 1977. No. 1, 31—50 (in Chinese), and English edition see *J. Math. Anal. Appl.* 76 (1980), 571—599.

[6] Bao-ming Pu and Ying-ming Liu, Fuzzy topology Ⅱ, product and quotient spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, 77 (1980), 20—37.

[7] B. Hutton, Uniformities on fuzzy topological spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, 58 (1977), 559—571.

[8] Mao-kang Luo, Pointed disposition of topology on lattice-Hausdorff property, Tietz Extension Theorem and others in locale theory, Ph. D. thesis. Sichuan Univ., 1992.

[9] Shu-hao Sun. Topological structure of locale and Grothendieck generalized sheaf theory, Ph. D. Thesis, Sichuan Univ., 1987.

[10] P. T. Johnstone and Shu-hao Sun, Weak products and Hausdorff locales, LNM 1948, Springer, 173—193.

[11] 张德学与刘应明，分配格的 L-fuzzy 拓扑表示与 L-fuzzy 理想，数学年刊，15A (1994), 59—68.

[12] Guo-jun Wang, Generalized topological molecular lattices, *Scientia Sinica*. Ser. A. 8 (1984), 785—798.

[13] Ying-ming Liu, An analysis on fuzzy membership relation in fuzzy set theory. *Chinese Annals of Math.*, 5*A* (1984), 481—486 (in Chinese); also see E. Sanchez. Ed., *Fuzzy information. knowledge representation and decision analysis*, Pergamon, 1984, 115—122.

[14] W. Sierpinski, General Topology, Toronto, 1952.

[15] M. W. Warner, Aspects of Topology (Ed. L. M. James), London Math. Society Lecture Note 93, 1985, 127—140.

[16] P. Shostak. Two decades of fuzzy topology: basic ideas. notions, and results. *Russian Math. Surveys*, 44 (1989), 6: 125—186.

[17] G. Gierz et al., A Compendium of Continuous Lattices, Springer-Verlag, 1980.

[18] Ying-ming Liu. Intersection operation on union-preserving mappings in completely distributive lattices. *J. Math. Anal. Appl.*, 84 (1981), 249—255.

[19] Guo-jun Wang, On the structure of fuzzy lattices. *Acta Math. Sinica.* 29 (1986), 539—543.

[20] Ying-ming Liu and Mao-kang Luo, lattice-valued Hahn-Dieudonné-Tong insersion theorem and stratification structure. *Topology Appl.*, 45 (1992), 173—188.

[21] Ying-ming Liu and Mao-kang Luo, Reverse problem of decomposition theorem and its application in constructing of functions, *Proc. IFSA*'91. Brussels, 1991, 129—132.

[22] J. Dieudonné, Une generalization des espaces compacts, *J. Math. Pures et Appl.*, 23 (1944), 65—76.

[23] De-xue Zhang, The stratified canonical topology on I (I) is uniformizable, *J. Math. Anal. Appl.*, 170(1992), No. 1, 65—74.

[24] Chong-you Zheng, L-fuzzy unit interval and fuzzy connectedness, *Fuzzy Sets and Systems*, 27 (1988), 73—76.

[25] De-Xue Zhang and Ying-ming Liu, L-fuzzy modification of completely distributive lattices, Math. Nachr., 168 (1994), 79—95.

[26] Ge-ping Wang, Induced I (L)-fuzzy topological spaces and N-compactness, *Kexue Tongbao*, 5 (1989), 333—335.

[27] De-xue Zhang and Ying-ming Liu, The weakly induced spaces related to an L-fuzzy topological space, *Acta Math. Sinica*, 36 (1993), 68—73.

[28] Guo-jun Wang and Luo-shan Xu. Lawson topology and refining of I (L), *Scientia Sinica. Ser.* A, 35 (1992), 705—712.

[29] Y. M. Liu, Inverse operation on union-preserving mappings in lattices and its applications to fuzzy uniform spaces, *Proc.* 12*th Inter. Symp. lof Multiple-valued Logic*, IEEE. 1982, 280—288.

[30] —, Pointwise characterization of complete regularity and imbedding theorem in fuzzy topological spaces, *Scientia Sinica*, Ser. A. 26 (1983), 138—147.

[31] Ji-hua Liang, On fuzzy metric spaces, *Chinese Annals of Math.*, Ser. A, 6 (1984), 1: 59—67.

[32] Ying-ming Liu, Fuzzy metrization-an application of imbedding theory, in: Bezdek, Ed., *Analysis of Fuzzy Information*, CRC, 1987, 203—209.

[33] Ji-hua Liang, Pointed characterization of fuzzy metric and its applications. *Acta Math. Sinica.* 30 (1987), 733—741.

[34] —, Fuzzy Smirnov-Nagata metrizaiton theorem. *J. Northeastern Math.*. 4 (1987), 419—428.

[35] Yu-wei Peng, Simplification of Erceg's fuzzy metric and its application, *Fuzzy Sets and Systems*, 54 (1993), 181—189.

[36] Ying-ming Liu, On fuzzy Stone-Čech compactification, *Acta Math. Sinica*, 26 (1983), 507—512.

[37] 刘应明、罗懋康，不分明紧化中预序关系，数学学报，31 (1988)，433—442.

[38] —Fuzzy Stone-Čech compactification and the largest Tychonoff compactifications. *Chinese Annals of Math.*, 10*B* (1989), 74—84.

[39] Ying-ming Liu and Mao-kang Luo, Induced spaces and fuzzy Stone-Čech compactifications, *Scientia Sinica*, Ser. A, 30 (1987), 1034—1044.

[40] Guo-jun Wang, A new fuzzy compactness defined by fuzzy nets, *J. Math. Anal. Appl.*, 94 (1983), 1—23.

[41] Yu-wei Peng, N-compactness in *L*-fuzzy topological spaces, *Acta Math.*, *Sinica*, 29 (1986), 555—558.

[42] Dong-sheng Zhao, The N-compactness in *L*-fuzzy topological spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, 128 (1987), 64—79.

[43] Ying-ming Liu and Ming He, Induced mappings in completely distributive lattice, *Proc. of Int. Symp. on Multiple-valued Logic*, Ontario, IEEE, 1985, 346—353.

[44] 刘应明，罗懋康，彭谦，完全分配律的分析式与拓扑式刻划，科学通报，35 (1989)，1121—1123.

[45] 周杰，格值连续函数和 L-fuzzy 紧性，四川大学学报，30 (1993)，455—462.

[46] J. Van Mill and G. M. Reed, Open Problems in Topology, North-Holland, 1990.

[47] —, Open problems in topology, Topology Appl., 48 (1992), 83—89.

[48] 梁基华，刘应明，[X→L]上的 Isbell 拓扑与 Scott 拓扑，数学年刊，(将发表)

[49] On one open problem of Lawson and Mislove, 数学年刊 (将发表).

[50] Guo-jun Wang, Theory of topological molecular lattices, *Fuzzy Sets and Systems*, 47 (1992), 351—376.

[51] Zhong-qiang Yang, Cartesian closedness of the category of topological molecular lattices, Ph. D. Thesis, Sichuan Univ., 1990.

[52] Xiao-quan Xu, Product and coproduct in the category of completely distributive lattices, *Chinese Science Bull.*, 31 (1990), 643—646.

[53] Tai-he Fan, The category of topological molecular lattices, Ph. D. Thesis, Sichuan Univ., 1990.

[54] Bo-yong He, Upper-class spaces of topological molecular lattices, *Chinese Annals of Math.*, 12 (1991), 4: 514—520.

[55] Ming-sheng Ying, A new approach for fuzzy topology (Ⅰ), (Ⅱ), *Fuzzy Sets and Systems*, 39 (1991), 303—321 and 47 (1992), 221—232.

[56] Guo-jun Wang, Theory of *L*-fuzzy Topological Spaces, Press of Shanxi Normal Univ., 1988.

[57] Ying-ming Liu, Fuzzy topology, stratifications and category theory, in: Between mind and computer (Eds. P. Z. Wang and K. F. Loe) World Scientific, Singapore, 1993, 183—224.

[58] 刘应明、梁基华，Fuzzy 拓扑学—层次结构和点式处理，数学进展，23 (1994)，NO. 4，304—321.

概率论在中国的发展概况和近年的若干进展

严士健
（北京师范大学数学系）

引　言

中国数学会已经走过 60 年的历程，而中国概率论从 1940 年许宝騄先生在西南联大讲授近代概率论以来，也经过半个多世纪. 在庆祝数学会成立 60 周年之际，将半个世纪来中国现代概率论的发展历程记录下来是有意义的. 对于概率论中随机分析方面，马志明教授专门写了文章. 本文仅就作者所了解的一些情况整理出来，一方面提供概率论在国内发展的一些历史情况，一方面介绍我所了解的一些研究方向在国内的进展. 但是由于作者资料搜集有限，亲身经历的事件又不多，水平所限，不全和不妥之处肯定不少. 仅供有兴趣者参考.

一　中国概率论的发展的一些情况

许宝騄先生是得到广泛承认的在概率、统计两方面具有世界水平的科学家. 他于 1940 年获得英国科学博士后回到正在经受战时生活艰辛的昆明西南联大. 他一面坚持科学研究，一面讲授了

一个包含测度论、概率论直到数理统计的长课. 当时听讲的有王寿仁、冷生明和钟开莱 (K. L. Chung). 新中国建立以后，他在长期身患多种重病的条件下,为中国的概率论培养了一大批人才，为概率论的学科发展做了大量的工作. 在1956年制定的全国科学发展规划中，概率统计和计算数学，偏微分方程一起被列为数学的重要发展方向. 在许先生的主持下，从北京大学、中山大学和南开大学等校的数学系选派了50名学生,作为国内第一届概率论与数理统计专门化在北京大学学习. 除北京大学的原有教师外,还有郑曾同、王寿仁等先生参加教学，开设了象测度论、概率极限定理、数理统计和马氏过程等专门化课程. 在许先生倡议下，当时还从苏联、东欧邀请了一些概率统计方面的学者来华进行学术交流. 这一措施，对我国概率统计教学科研队伍的形成和发展起了推动作用. 1970年他病逝的时候，人们在他的床前发现的是一叠刚刚演算过的草稿. 许先生的为人为学，是我国数学界的一个榜样 [B]. 郑曾同和王寿仁两位先生除了参加北京大学的概率统计专门化的工作外,他们还各自为中国的概率论发展做出了贡献. 从五十年代初中国科学院数学研究所成立起，王寿仁先生就负责概率统计研究室的工作，领导青年学者进行了平稳过程（时间序列）及其统计，以及数学信息论等的学习和研究，培养了一批概率统计的人才. 郑曾同先生是1949年以前留学美国学习概率论的一位前辈，回国后，进行了测度弱收敛的研究. 在中山大学培养了一批概率论人才.

我国概率论发展的另一措施是在五十年代前期派出了一批留学苏联学习概率论的研究生和进修教师，这里有学习平稳过程和信息论的江泽培、学习信息论的胡国定和学习马尔可夫过程的梁之舜和王梓坤. 他们大致都在50年代末期回国. 1961年暑假在西颐宾馆召开了第一次概率论学术会议. 参加会议的除上述各位（许先生没有参加）外，还有复旦大学的郑绍濂和北京师范大学的严士健等人. 会上对前一段的科研工作进行了学术交流并讨论了

我国概率论应该注意的一些方向. 可以说，从 1958 年到 1966 年，我国概率论初步形成了一些研究据点和队伍. 其中北京大学以许先生和江泽培为首，开展了马尔可夫过程、平稳过程和信息论的研究；数学研究所以王寿仁为首以及复旦大学以郑绍濂为首开展了平稳过程（时间序列）和随机过程相互等价与奇异的研究；中山大学以郑曾同、梁之舜为首开展了马尔可夫过程、测度弱收敛理论的研究；南开大学以胡国定、王梓坤为首开展了马尔可夫链和信息论的研究；在北京师范大学严士健和一些青年教师开始了概率论的学习和平稳过程（时间序列）的研究.

‘文革’后期，仅有少数几个单位开始进行一些研究，其中数学研究所进行卡尔曼滤波和一般随机过程的研究；王梓坤将马尔可夫链应用于地震预报；还有侯振挺研究马尔可夫链的定性理论. 待到‘文革’结束，从全国范围看，概率论界对于国际上学科的发展了解很少，科学研究应如何恢复是急待解决的问题. 为了适应全国的概率论研究急需恢复和革新的形势，除了各系统各单位派遣一批中青年学者到国外合作研究、访问和学习外，概率界的同仁在七，八十年代之交做了一系列的工作. 例如：数学研究所（后为应用数学所）的严加安和陈培德连续在 77，78 两年举办了两次概率论讲习班，内容为一般随机过程理论、鞅与随机积分理论，严加安的“鞅与随机积分引论”就是以他在讲习班上的讲义为基础写成的. 这两届讲习班对于推动全国开展随机分析的研究是有作用的. 这个讨论班以后转化为多指标过程（实际上涉及概率论的众多领域）的学术交流会. 1978 年的初冬在中山大学召开全国概率学术交流会议，会议组织了一系列综合报告，介绍国际上概率论一些研究方向的进展，以便于各单位选择科研方向. 此会议在 1980 年召开第二次以后，形成了由中国数学会概率统计学会（以下简称中国概率统计学会）每四年一次召开的全国概率论学术交流会议. 1981 年中国概率统计学会成立以后，全国性概率论学术交流的会议还有概率统计学术年会，它从 1982 年起由学会

每四年召开一次．在国家教委科技司的推动下，王梓坤和严士健从1980年开始连续三年举办了暑期高校概率论讨论班，系统介绍牛顿位势与布朗运动、无穷粒子系统、马尔可夫链与随机点过程等研究方向的基本内容、方法与发展动态．为了提高各个高校概率论与数理统计的教学水平，扩大教师的知识基础和开阔眼界，从1979年开始，首先由高等师范系统，接着是工科院校及有关院校，举办了大约几十次概率统计讲习班．随着概率论科学研究的恢复与兴起，有关学校进一步对口邀请国外专家来华访问、交流和讲学，同时派教师出国参加学术会议和进行学术访问．这里值得提出的有两次．一次是1984年有关高校和应用数学所联合邀请日本的几位随机分析专家来华系统讲学，一次是中国概率统计学会协助南开数学研究所主办88—89概率统计学术年，邀请美国和前苏联专家系统地介绍粒子系统、随机场、大偏差和超过程等研究方向的进展和进行学术交流．1985年，学会在华东师范大学的大力支持下，办起了自己的杂志——“应用概率统计”．1986年由全国工科院校应用概率统计委员会、北京工业大学应用数学系和长沙铁道学院科研所主办了“数理统计与应用概率”杂志．经过概率界十几年同仁的努力，我国概率论的科学研究和学科建设不但恢复了，而且有了较大的发展，培养了一大批博士，形成了一支教学和科学研究队伍．在王元教授的推动下，1991年由严士健、杨重骏和汪嘉冈为美国数学会的“当代数学丛书”联合主编“概率论及其应用在中国”[YYW]，该书包含了十九篇向国际介绍中国在概率论有关方向的研究成果的综合文章．

虽然上面列举的一系列活动并不都是中国概率统计学会组织的，中国概率统计学会组织的只与统计有关的活动（例如中日统计会议）也没有谈到．但是这些都是中国概率统计界的同仁们从发展全国的概率论事业的愿望出发而积极进行的，所以广义地说，是学会的一种活动，应该将这些事件作为发展学科的历程和经验记录下来，供后来者参考．

二 近年的若干进展

由于作者水平和接触范围所限，只能就若干领域的部分成果加以叙述.

（一）概率极限理论. 虽说叙述近年进展，但是许先生对概率极限理论的卓越成就应该在此加以简单介绍. 许先生对概率论的贡献来自他驾御特征函数的完满的技巧. 他首次给出样本方差适当正则化以后的分布函数向正态分布的一致速度［H］. 此文的方法还可以用来解决样本高阶中心矩、样本相关系数以及样本的学生氏 t-分布的渐近问题. ［HR］首先证明了如下结论：设 $\{\zeta_n : n \geqslant 1\}$ 为独立同分布均值为 0 方差为 1 的随机变量序列，则对任何 $\varepsilon > 0$，

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|\sum_{i=1}^{n} \zeta_i| \geqslant n\varepsilon) < \infty .$$

这一工作的意义不仅是结论加强了强大数律，更在于它提出了完全收敛性的研究方向. 四十年代前后，寻求行独立随机变量三角阵列行和弱收敛问题的完整答案是一个引起一批著名学者所关注的挑战性问题. 许先生参加了这一竞争并且证明自己是一个强者（有关这一过程，［C］中有一段真实动人的叙述）. 文［H1］本是他 1947 年寄给钟开莱教授的一份手稿. 在这篇文章中，许独立于 Gnedenko 也得到了三角阵列的独立和弱收敛于一无穷可分分布的充分与必要条件，而且方法上很有特色.

概率极限理论近年在国内取得一些进展. 1986 年以来，杭州大学的林正炎和陆传荣等建立了直接研究独立而不同分布的随机变量序列的部分和的增量的方法，得到与独立同分布情形的最佳结果相当的结果. 在直接解决这些问题的同时，他们与其他学者改进了以往许多关于 Weiner 及相关 Gauss 过程增量的结果. 并

且将它们进一步推广到有意义的过程. 在概率的强极限理论中取得新进展. 首次研究了无穷维随机过程 Gauss 过程的轨道性质. 这方面的基本结果已总结于专著《强极限定理》[LL]. 他们和其他学者还对各种相依随机变量序列（或部分和、序列和）的强逼近、弱收敛、完全收敛性及经验过程的弱收敛获得了一批成果. 他们的一些结果将有关专著的几乎所有结果作了实质性的改进与推广而且几乎都是最佳的；证明了一些学者提出的多种猜测. 作者们在方法上为获得这些成果建立了随机变量序列的一系列有关的新不等式（[LL]，[LLS]）. 北京大学的郭懋正和武汉大学的吴黎明在概率大偏差理论上取得了显著的进展. 吉林大学在 Banach 空间取值的强大数律与重对数律等方面做出了一系列成果 [WWY]. 此外，统计界在研究大样本理论的同时，也对概率极限理论作出了贡献.

（二）马尔可夫链与 p-函数. 从 30 年代起，Kolmogorov 等一大批著名概率论学者对时齐马尔可夫链（亦称可列马尔可夫过程）进行了长期研究. 我国概率论学者从 50 年代起对它进行了深入的研究. 从 50 年代起，王梓坤先用概率方法构造生灭过程. 继而，杨向群和他先后用分析方法和概率方法构造了全部生灭过程，并且将这两种构造论之间的关系阐述清楚，后由杨构造出有限流出有限非保守条件下的全部 Q-过程 [Y]. 构造论的另一问题是讨论 Q-过程的存在性和唯一性的条件. 侯振挺在 70 年代完满地解决了全稳定条件下 Q-唯一性问题，其后由陈木法等将其推广到一般空间. 至于不是全稳定的情形，则要困难得多，侯和他的学生们运用新的方法，经过十几年的努力，对于存在性问题取得了显著的进展（[Ho] [HG]，[HD]）. 王梓坤等对马尔可夫链（以至一般情形）的性质，如可微性、常返性、正常返性以及样本函数的性质，多方面进行了研究（见 [W]. 对可逆马尔可夫链的构造理论研究见 [Cm]，与熵产生等物理问题的关系见 [QQG]. 胡迪鹤对非时齐的情形进行了研究（见 [HLG]）. 近年来，钱敏平和

她的学生研究了用非时齐马尔可夫链形成神经网络的概率模型，讨论它的学习和记忆等功能.

我国学者对与马尔可夫链密切相关的更新序列和p-函数（马尔可夫链的对角线函数就是p-函数）进行了深入的研究. 证明了困难的 Davidson 关于p-函数的猜想.（0，∞）上的函数 p 称为（标准）p-函数，如果存在一族随机事件 $\{E(t):t>0\}$ 使得对任何正整数 k 及实数 $0<t_1<\cdots<t_k$，都有 $P(E(t_1)\cdots E(t_k))=p(t_1)p(t_2-t_1)\cdots p(t_k-t_{k-1})$，并且 $\lim_{t\to 0}P(t)=1$. 对于任意p-函数 p 及 $M\in(0,1)$，定义 $m(p)=\inf\{p(t):0<t<1\}$，$I(M)=\inf\{m(p):p$ 为 p-函数，$p(1)=M\}$，$\upsilon_0=\inf\{M:I(M)>0\}$Davidson1968 年证明了：$\upsilon_0\geq e^{-1}$ 并且猜测：

$$\upsilon_0=e^{-1}.$$

（这个问题与马尔可夫链的关系及其意义见［D］）. D. G. Kendall 鉴于问题的困难和根据马尔可夫过程理论的需要，提出了较弱的猜想：$\upsilon_0\leqslant 1/2$. 1986 年邹捷中应用余耀祺改进了的方法证明了 Kendall 猜想而于第二年他们两人获 Davidson 奖，1991 年戴永隆终于用新的方法证明了 Davidson 猜想. 证明是相当精巧和复杂的（［D］，［D1］）. 中山大学和长沙铁道学院对更新序列和 p-函数进行了多方面的研究，其研究综述见［LH］.

（三）粒子系统与相关论题. 在 60 年代后期，美国和前苏联的数学家用概率论的理论提出了刻划统计物理中相变问题的一般数学模型，这就是今天国际上称之为 Gibbs 随机场（测度）理论的开始，随后又提出了这种问题的动态模型，后来发展成相互作用粒子系统. 这两个研究方向一经出现，就受到一大批概率学家和数学物理学家的重视. 究其原因可能在于：(1) 它给出用数学描述由大量个体组成且它们相互作用的系统的模型，有可能用以研究复杂系统的性态，如相变，分岔，流体的性质等；(2) 从数学上，提出了既研究（测度及平稳分布等）的唯一性又研究不唯一性的需要. 严士健根据他对统计物理以及随机场与粒子系统的

发展的初步了解．于1978年在国内率先和‘文革’后第一批研究生一道进行了学习和研究．并结合非平衡统计物理的发展，提出了有限维和无限维反应扩散过程的研究．十五年来，经过他和陈木法，刘秀芳以及一大批学生的努力，建立了非紧空间的无穷粒子系统的马尔可夫过程的存在性和唯一性条件，获得无穷维反应扩散过程的遍历性和非遍历性的一些结果．在获得这些结果的过程中，发展了过程的耦合方法．陈木法和王凤雨进一步用耦合方法研究流形上的 Laplace 算子的特征值估计，梯度估计以及对数 Sobolev 不等式的常数的估计等问题，全面改进了以往的结果．可以说这些研究和成果具有我们自己的特色（见 [Cm]，[Cm1]，[CY]，[Cm2]）．对于紧空间上的无穷粒子系统的马尔可夫过程，北京师大和中山大学的学者也做了一些好结果（见[CY]，[Ys]）．对于随机场，首次得到一个关于某种 Gibbs 随机场的一致中心极限定理，由于这种由统计物理提出的问题的条件十分不同于经典的中心极限定理，所以被认为是这方面的一个突破；从数学上严格证明：二维和二维以上的 Sierpinski 格子海绵上的 Ising 模型没有相变，而 Sierpinski 格子地毯上的 Ising 模型有相变（见[Ys]）．1989年以来，王梓坤领导他的学生们开展了超过程的研究，这是目前国际上的一个研究热点．从某种意义上说，它也是粒子系统的一种模型，他们获得了一些受到国际上肯定的结果．

（四）其他．除了上述以及马志明的文章中叙述的以外，国内概率论还有其他的进展．或者由于作者不熟悉，或者由于篇幅所限．只好介绍一些文献，请有兴趣者参考．

首先是江泽培教授的开始于50年代的平稳随机场的研究，近年来他和他的学生又取得显著的进展，文 [Ct] 是这方面的一个综合报告．

随着分形成为科学研究的一个热点，随机分形与分形上的随机过程也成为概率论的一个热点．周先银得到三维高分子测度（即 Westwater 过程）的样本的 Hausdorff 测度，证明 Westwater

过程的自交局部时存在，回答了数学物理学家 E. Nelson 提出的问题；与 S. Kuosuka 合作证明了谱维数小于等于二的分形（包括二维 Sierpinski 地毯及所有巢分形）上扩散过程的存在性，从而包括了以前这个构造问题的所有结果. 最近几年，武汉大学和北京师大的一批青年学者对布朗运动，O. -U. 过程以及稳定过程的轨道的分形性质进行了多方面的研究，获得一系列的结果（参见[WH]）. 最近，刘秀芳和他的学生解决了分形渗流（Mandelbrot 分形）的一个公开问题，并改进了渗流发生概率的临界值的估计[WL].

参考文献

[B] 北京大学概率统计系，纪念许宝騄教授八十诞辰，应用概率统计 6（1990），337—341.

[C] Chung, K. L., *Hsu's work in probability*, Ann. Statist 7（1979），479—483.

[Cm] 陈木法，跳过程与粒子系统，北京师范大学出版社，北京，1986.

[Cm1] Chen, M. F., *From Markov Chains to Non-equilibrium Particle Systems*, World Scientific, Singapore, 1992.

[Cm2] Chen, M. F., *Optimal couplings and application to Riemannian geometry*, Prob. Th. and Math. Stat. (Eds. B. Grigelionis et ai.) 1994 VPS/TEV, Vol. 1.

[Ct] Chiang, T. P., *Stationary random field: prediction theory, Markov models, limit theorems*, In [YYW], 1991, pp. 79—101.

[CY] Chen, M. F. and Yan, S. J., *Jump processes and particle systems*, In [YYW], 1991, pp. 23—57.

[D] 戴永隆，马尔可夫振荡问题，广东科技出版社，广东广州，1992.

[D1] Dai Yonglong, *The Markov oscillation problem*, Acta Math. Sinica (New Ser.) 10 (1994.) Special issue 99—140.

[H] Hsu, P. L., *The approxiamate distributions of the mean and variance of a sample of independent variables*, Ann. Math. Statist. 16 (1945), 1—29.

[H1] Hsu, P. L., *A general weak limit theorem for independent distributions*, appendix Ⅱ in Limit Distributions of Sums of Indeoendent Random Variables (Eds. B. V. Gnedenko and A. N. Kolmogorov, Transl. K. L. Chung), Addison-Wesley, 1968.

[HR] Hsu, P. L., *Complete convergence and the law of large numbers*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 33 (1947), 25—31.

[Ho] Hou, Z. T., *Q-matrix problem*, In [YYW], 1991, pp. 127—148.

[HD] 侯振挺等，马尔可夫过程的 *Q*-矩阵问题，湖南科技出版社，湖南长沙，1994.

[HG] 侯振挺，郭青峰，齐次可列马尔可夫过程，纯粹数学与应用数学专著，第 2 号，科学出版社，北京，1978.

[HLG] Hu, D. H., Liu, L. Q. and Gao, F. Q., *Sumary of recent research accomplishments in Markov processes and Markov fields at Wuhan University*, In [YYW], 1991, pp. 149—168.

[LH] Liang, Z. S. and Huang, Z. R., *Renewal sequences, p-functions, their extensions and related topics*, In [YYW] 1991, pp. 187—205.

[LL] 林正炎，陆传荣，强极限定理，纯粹数学与应用数学专著，第25号，科学出版社，北京，1992.

[LLS] Lin, Z. Y., Lu, C. R. and Shao Q. M., *Contribution to the limit theorems*, In [YYW] 1991, pp. 221—237.

[QQG] Qian, M. P., Qian, M. and Gong, G. L., *The reversibility and the entropy production of Markov processes*, In [YYW], 1991, pp. 255—261.

[W] 王梓坤，生灭过程和马尔科夫链，纯粹数学与应用数学专著，第5号，科学出版社，北京，1980.

[WH] 随机过程课题组（武汉大学数学系），随机分形，数学进展（1994）.

[WL] Wu, J. and Liu, X. F., *The existence of phase V in the Mandellrot percolation process*, J. of Stat physics, Vol. 80 (1995), 1405—1414.

[WWY] Wu, Z. Q., Wang, X. C., Yang, X. Y. and Li, D. L., *Some recent results on the strong LLN and the LIL in Banach spaces*, In [YYW], 1991, pp. 301—311.

[Y] 杨向群，可列马尔科夫过程构造论，湖南科技出版社，湖南长沙，1986 第二版；Xiang-qun Yang, The Construction Theory of Denumerable Markov Processes, John Wiley & Sons, Chichester. New York. etc.

[Ys] Yan, S. J., *Some recent results of Particle systems*, Proceedings of International Conf. Dirichlet Forms and Stoch. Proc. Beijing, China, Oct., 1993. Walter de Gruyter Publishers, Berlin, 1995.

[YYW] Yan, S. J., Yang C. C. and Wang, J. G. (Eds), *Probability Theory and its Applications in China*, Contemporary Mathematics, Vol. 118, AMS, Rhode Island, USA, 1991.

我国非参数统计研究的若干成果

陈希孺
（中国科技大学研究生院）

一 引 言

非参数统计是相对于参数统计而言的，后者是指那种能用少量实参数来刻划的统计模型的理论和方法，其中最重要的是正态分布模型，按这个一般性的分划，可以说当今的数理统计研究工作，大部分以至绝大部分是非参数性的.

由于“参数”与“非参数”并无断然分明的区别，这个分支的近代发展源起何时，也就难于确切界定. 按上述标准，本世纪初K. Pearson关于拟合优度χ^2检验的工作是非参数性的. 由于这一工作在近代数理统计史上的巨大影响，以它作为非参数统计这个分支的起点，也许是合适的，不过，非参数统计发展成一个有重要应用意义，理论上博大精深且日渐占据统计主流地位的分支，则是从二次大战后年代才开始的，此前在30年代，虽有以Колмогоров为代表的苏联非参数统计学派的引人注目的工作，但因其论题的局限性，其成就的理论意义大于实用意义，以致未能成为这个分支的主导并对以后的发展也未产生深远的影响.

我国非参数统计的研究，起源于张里千50年代中期关于Колмогоров统计量的工作. 囿于当时的环境和条件，在这个领域内的研究完全追随苏联学派，也是可以理解的. 除以张里千为代表

外，当时在这个方向上工作过的还有王寿仁和成平，他们也都做出过很好的工作，50 年代末，张里千的研究兴趣开始转移到试验设计和应用统计，再加上一些其他的原因，这个方向在我国归于消亡，而在当时我国很有限的数理统计研究队伍中，也别无从事非参数统计研究的人员. 因此，自 50 年代末至 70 年代末这 20 年期间，这个分支在我国是一个空白，而当时正是国际上这个分支进展最快的一个时期. 80 年代以来，我国统计界重新开始了这方面的研究，在 U 统计量和其他一些重要的非参数统计量、概率密度估计和非参数回归等重要方面，都作出了一批有一定水平的工作，有的还受到国际上的重视. 如今可以说，我们在这个领域大体上跟上了当前发展的步伐，但在队伍人数和素质上，在工作的数量质量上，与国际先进水平相比，仍有较大的差距.

以下对这几十年来我国非参数统计研究工作情况作一简短的介绍. 囿于作者的学识和见闻，这肯定会有其不全面和不准确之处. 因此，请求读者把这只看成为作者个人就其认为较了解的方面所发表的一点看法，而非对这个领域内所有工作的全面评价. 挂一漏万及轻重失当之处，还请读者按上述意思加以谅解.

二　Колмогоров 统计量

以 F 记一个一维分布，$X_1, \cdots, X_n$ 记从 F 中抽出的独立随机 (iid.) 样本. 定义

$$F_n(x) = n^{-1}\Sigma_{i=1}^{n} I(X_i \leqslant x), \quad -\infty < x < \infty.$$

此处 I 为指示函数，F_n 称为样本 $X_1, \cdots, X_n$ 的经验分布函数. 假如用 F_n 去估计 F，则差距可用一致距离 $D_n = \sup_x |F_n(x) - F(x)|$ 去衡量. 1933 年，Гливенко 和 Cantelli 先后证明：几乎必然（即以概率 1）有 $D_n \to 0$. 这个结果证明不难，但以其重要性被人誉为“统计学的存在定理”. 不过，对检验有关总体分布的假设而言，这

个结果还不够，因为它未提供 D_n 的尾部概率的估计. 1933 年 Колмогоров 解决了这个问题，他证明了下述结果：

$$\lim_{n\to\infty} P(\sqrt{n}D_n \geqslant \lambda)$$
$$= 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \exp(-2k^2\lambda^2), \quad -\infty < \lambda < \infty. \quad (1)$$

自然，当 n 不太大时，分布 (1) 会与 $\sqrt{n}D_n$ 的真确分布有相当的误差，从而影响到检验临界值的精度，所以，寻找 $\sqrt{n}D_n$ 的真确分布，仍是一个很重要的问题. 这个困难问题直到 1955 年才由当时苏联的 Королюк 首先解决，一年以后，张里千发表了工作 [1]，用直接的方法也解决了这个问题. 张的方法不仅在论证上简单许多，所得 $\sqrt{n}D_n$ 分布的表达式也比 Королюк 的更简单整齐. 有兴趣的读者可参阅 [1].

张的方法的另一优点是，据此可以计算 $\sqrt{n}D_n$ 分布的渐近展开. 在 [1] 中，张里千在很宽的条件下，成功地把 $\sqrt{n}D_n$ 的分布按 $1/\sqrt{n}$ 的量级展开到第四项，其首项即为极限分布 (1)，具体形式可引述如下：

$$P(\sqrt{n}D_n < \lambda) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k e^{-2k^2\lambda^2}\{1 - (2/3)\cdot n^{-1/2}k^2\lambda - (18)^{-1}n^{-1}(f_1 - 4(f_1+3)k^2\lambda^2 + 8k^4\lambda^4) + (27)^{-1}n^{-3/2}k^2\lambda(5^{-1}f_2 - (4/15)(f_2+45)k^2\lambda^2 + 8k^4\lambda^4) + O(z^{13}n^{-2})\}. \quad (2)$$

其中

$$f_1 = k^2 - (1-(-1)^k)/2,$$
$$f_2 = 5k^2 + 22 - 15(1-(-1)^k)/2.$$

又 [1] 中称对 λ 须作限制 $0<\varepsilon\leqslant\lambda=0\ (n^{1/5})$，但显然只有在 $\lambda=0\ (n^{1/16})$ 时，展式的第三项才有意义.

在[1]发表之前一年，张里千在[2]中研究了单边 Колмогоров 统计量 $D_n^+ = \sup_x(F_n(x) - F(x))$ 的真确分布和渐近展开问题

（文［2］中称D_n^+为 Смирнов 统计量．但在一般统计学著作中，Смирнов 统计量是指两个样本各自的经验分布的一致距离．把D_n^+称为单边 Колмогоров 统计量似更合适）．对这个统计量，Смирнов 已在 1939 年导出了形式很简单的极限分布：

$$\lim_{n\to\infty} P(\sqrt{n}D_n^+ < \lambda) = \begin{cases} 1 - e^{-2\lambda^2}, & \lambda > 0, \\ 0, & \lambda \leqslant 0. \end{cases}$$

且在 1944 年的一项工作中，把$\sqrt{n}D_n^+$的分布的渐近展开算到第二项（以$1/\sqrt{n}$为量级，下同），还得到$\sqrt{n}D_n^+$的真确分布，张里千在工作［2］中，使用更简捷的方法导出了$\sqrt{n}D_n^+$的真确分布，并将$\sqrt{n}D_n^+$的分布作渐近展开直至第四项．

张里千的工作是苏联非参数统计学派范围内的重要进展，因而颇受当时苏联学者的重视．他的上述两篇论文曾由苏联学者译成俄文，在《MATEMATИKA》上发表，由于当时我国与西方统计界没有交往，起初张的工作不为西方学者所知，直到 1961 年，苏联学者 ГнеДинко 等在第四次 Berkeley 概率统计学术会议的报告中介绍了张的工作，他的研究成果才传入西方世界．自那以后，张的上述成果逐渐为西方有关著作所注意，例如，较近出版的一本在西方流传甚广的专著《Empirical Process With Applications to Statistics》（G. R. Shorack 等，1985），就引述了张的工作．

张里千关于经验分布的工作有一点值得一提，即他用完全初等的工具（经典组合分析与初等分析）而证得了很深刻的结果，与某些假定和结论繁复而论证肤浅的工作形成对照．从以后几十年数理统计发展的历程看，这一现象也非纯出偶然．数理统计学依其问题的特点，是初等方法大可用武之地．难处在于，要善于创造性地和巧妙地使用一些貌似平凡的工具而能达到精深的结果，从这一点看，张里千的上述工作可算是一个范例．我国著名的统计学大师许宝騄教授的许多工作，也是具有这种特点的范例．

三　U 统计量

设 $f(x_1, \cdots, x_m)$ 是一个 m 元对称函数，$X_1, \cdots, X_n$ 为样本，$n \geqslant m$，则

$$U_n = U_n(X_1, \cdots, X_n)$$
$$= \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_m \leqslant n} f(X_{i_1}, \cdots, X_{i_m}) \Big/ \binom{n}{m} \qquad (3)$$

称为以 f 为核的基于样本 $X_1, \cdots, X_n$ 的 U 统计量. 当 $m=1$ 时，U_n 就是 $f(x_1), \cdots, f(x_n)$ 的算术平均，故 U 统计量就是最重要的统计量——样本均值的一个推广. 除样本均值外，另一个最重要的统计量——样本方差，也是 U 统计量，其核为 $(x_1 - x_2)^2$.

U 统计量是 Hoeffding 于 1948 年的一项工作中首先提出的，自那时以来，可以说直到现在，U 统计量一直是数理统计和概率学者感兴趣的一个研究课题，发表了大量的工作. 其在统计应用上的重要性，在于它是构造非参数总体分布特征的无偏最小方差估计的主要工具，以及它在非参数检验问题中的作用.

Hoeffding1948 年工作的主要结果，是证明了标准化 U 统计量的渐近正态性：设样本 $X_1, X_2, \cdots$ 为 iid. 记 $\theta = Ef(X_1, \cdots, X_m)$，又设 U_n 的方差 σ_n^2 非 0 有限，则 $(U_n - \theta)/\sigma_n$ 的分布函数 $F_n(x)$ 当 $n \to \infty$ 时，收敛于标准正态分布函数 $\Phi(x)$. 此后，学者们研究的重点之一是当 $n \to \infty$ 时，一致距离 $\Delta_n = \sup_x |F_n(x) - \Phi(x)|$ 趋于零的速度.

这个问题几经周折，起初的结果未达到最好的阶，或在某些限制条件（如核有界）下达到最好的阶 $O(n^{-1/2})$. 直到 1978 年，才由 Calleary 等在最一般的条件 $E|f(X_1, \cdots, X_m)|^3 < \infty$ 之下得到最优的阶 $O(n^{-1/2})$. 这个条件及所得的阶，与在 idd 和之下的条件及其 Berry-Esseen 界限相同，是不可改进的. 但问题并未结束，

因为当 $|x| \to \infty$ 时有 $F_n(x) - \Phi(x) \to 0$，这一点在 $0(n^{-1/2})$ 这个“一致速度”中反映不出来. 就是说对 $|F_n(x) - \Phi(x)|$ 的估计应包含一个反映这一情况的因子，即所谓“非一致速度”. 这是一个困难问题，即在 iid 和这个最简单的特例，也是到 60 年代才解决的.

陈希孺和赵林城自 80 年代初开始研究这个问题，在得出某些中间结果后，在 1982 年 [3] 完全解决了这个问题：在 $E|f(X_1, \cdots, X_m)|^3 < \infty$ 的条件下证得

$$|F_n(x) - \Phi(x)| \leqslant Cn^{-\frac{1}{2}}(1 + |x|^3)^{-1},$$

其中 $C>0$ 为与 x 和 n 都无关的常数.

这个结果受到统计学界一定的重视，曾为在美国出版的《Encyclopedia of Statistical Sciences》所引述.

除 *iid* 样本外，另一个在应用上有意义的情况是有限总体 U 统计量，即设 A 为一有限总体，$X_1, \cdots, X_n$ 为自 A 中抽出的不放回随机样本，然后依 (3) 式定义 U_n. 赵林城和陈希孺在最弱的条件下，得到了标准化 U_n 的分布与标准正态分布的一致距离，当 $n \to \infty$ 时的最优速度是 $O(n^{-1/2})$.

四 密度估计和非参数回归

非参数密度估计和非参数回归，是非参数统计中较近发展起来的重要领域，前者的发展可认为始于 1962 年 Parzen 关于核估计的工作，而后者则以 Stone1977 年《Consistent nonparametric regression》一文的发表为标志. 我国统计学者自 80 年代的初期开始投入这方面的研究，据不完全统计，在这些领域中已在国内外刊物上发表文章近百篇，现举几件工作作为例子介绍一下.

1. 非参数回归的问题是：设随机变量 X 和 Y 分别为 $d \geqslant 1$ 维和 1 维，$(X_i, Y_i), 1 \leqslant i \leqslant n$ 是 (X, Y) 的 iid. 样本，要由之估计回归函数 $m(x) = E(Y|X = x)$. 要求估计量 $\hat{m}_n(x)$ 有良好的大样本性

质，如相合性（$\hat{m}_n(x) \to m(x)$），渐近正态性等．一个重要的估计方法是近邻法，即在估计 $m(x)$ 时利用 x 点近邻的那些样本．对这个方法，为了有相合性，以往的工作要求 Y 有界．赵林城和白志东在［4］中，把这个条件作了实质性的改进：只要求 $E|Y|^r < \infty$ 对某个 $r > 1$ 就够了．

2. 如果 Y 只取 0，1 两值，则得到判别问题，即利用样本 (X_i, Y_i)，$1 \leqslant i \leqslant n$ 和 X 之值去判定 Y 为 1 或 0．对此一个重要的问题是估计一种判别方法的"错判概率"R，对近邻判别法，Wagner 曾提出用"交叉验证"去估计 R，即在样本中删去一个，如 (X_i, Y_i)，用其余的样本和 X_i 去判别 Y_i．Wagner 证明了，这样作出的估计是 R 的弱相合估计，他同时提出问题：这一估计在何时为强相合的？这个问题由白志东在 1985 年［5］中用一个很巧妙的方法所解决，他证明了：只要 X 是非原子(non-atomic)的，则强相合成立且有指数速度．

3. 密度估计的问题是：设 X_1，…，X_n 是从某一有密度 f 的总体中抽出的 iid. 样本，要据以估计 $f(x)$ 之值，设 $f_n(x) = f_n(x;\ x_1, \cdots, x_n)$ 为某一估计，要研究在何时 $f_n(x)$ 收敛于 $f(x)$，收敛速度如何，及其他的大样本性质等．

陈希孺在一些情况下定出了可能最优的收敛速度，例如：

a. 若 f 为一维密度，满足 δ 阶 $(0<\delta\leqslant 1)$ Lipshitz 条件．［6］中证明：当用近邻法去估计 f 时，一致速度可达到 $\sup\limits_x |f_n(x) - f(x)| = O(n^{-\delta/(1+3\delta)}(\log n)^{1/2})$，其指数 $\delta/(1+3\delta)$ 不可改进：用任何近邻估计都不能达到 $O(n^{-\delta/(1+3\delta)})$．

b. 以 $C_{k\alpha}$ 记一切满足下述条件的 d 维密度的族：

$$\sup_x |\partial^k f(x)/\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_d^{k_d}| \leqslant \alpha, \quad x = (x_1, \cdots, x_d),$$

$$k_i \geqslant 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant d, \quad \sum\nolimits_{i=1}^d k_i = d.$$

在［7］中证明：不可能存在 f 的一个估计 $f_n(x)$，使

$$f_n(0) - f(0) = o_p(n^{-k/(2k+d)}), \text{对一切 } f \in C_{k\alpha}.$$

但 $O_p(n^{-k/(2k+d)})$ 可以达到，另外，也不可能存在 f 的一个估计 f_n，使

$$E_f(f_n(0)-f(0))^2=o(n^{-2k/(2k+d)}),\text{对一切} f\in C_{ka}.$$

但 $O(n^{-2k/(2k+d)})$ 可以达到，以上 0 点可以换成 R^d 中任意指定的一点.

参考文献

[1] 张里千，论柯尔莫哥洛夫统计量的真确分布及其渐近展开，数学学报 6 卷 1 期，1956，55—81.

[2] 张里千，论斯米尔诺夫统计量的真确分布及其渐近展开，数学进展，1 卷 4 期，775—790，1955.

[3] 赵林城，陈希孺，U 统计量的分布的非一致性收敛速度，中国科学 A 辑，1982 年 12 月，1066—1078.

[4] Zhao, L. C and Bai, Z. D. strong consistency of nearest neighbor estimates of nonparametric regression functions, Scientia Sinica, Series A, 1984, 27, 1027—1034.

[5] Bai, Z. D., The strong consistency of error probability estimates in NN discrimination. Chin. Ann. Math., Series B, 1985, 6, 299—308.

[6] Chen Xiru, Uniform convergence rates of the Nearest Neighbor density estimates. 数学研究与评论, Vol. 3, No. 1, 1983, 61—68.

[7] Chen, X. R., On the problem of best convergence rates of density estimates, Chin. Ann. Math., Series B, 1984, 5, 185—192; Correction. Chin. Ann.. Math., Series B, 1984, 5, 374.

泛函分析在中国的某些发展

严绍宗　　　　李炳仁
（复旦大学）　（中科院数学所）

泛函分析是无穷维空间中的分析学，它具有分析、代数、几何、拓扑等综合抽象的特征，也是近代数学中形成较晚的重要分支. 大体上说来，泛函分析开始形成于本世纪 20 年代初. 到 1932 年，著名数学家 S. Banach 的“线性算子理论”一书的出版，标志着这个学科正式跻身于近代数学之林.

早在泛函分析诞生之初，我国老一辈数学家曾远荣教授等就作出了重要的贡献. 例如，曾先生对于 Hilbert 空间及其线性算子理论，引入了逼真解与广义逆的概念，并给出了广义逆算子存在的充要条件等. 现在举世公认，曾远荣教授是广义逆的奠基者，人们称之为“曾广义逆”，在国际上具有广泛的影响. 广义逆还渗透到计算数学等分支中，成为计算数学的重要内容.

然而在解放前，泛函分析及其研究在我国基本上还是空白，即使在 50 年代初期，我国大部份高等学校并不能开设泛函分析的基本课程.

原中科院数学所关肇直教授曾于 1947 年赴法国留学，在著名泛函分析学家 M. Fréchet 指导下研究数学. 从 50 年代起，他在国内大力倡导这门学科. 他与田方增、冯康在数学所建立了泛函分析研究室. 在关肇直的领导下，一批年青工作者学习泛函分析的基本理论，并开展对于近似方法、赋范环论、广义函数论、谱理论、中子迁移理论等的研究. 在此基础上，1958 年关肇直编著出

版了“泛函分析讲义”，这本书的问世使我国首次有了这方面系统的教科书. 关肇直又在 1957 年与 1961 年分别在北京大学与中国科技大学（当时设在北京）开设泛函分析的专门课程，为我国培养了许多研究人材. 在泛函分析的研究方面，关肇直教授也作出了重要的贡献. 例如，1956 年他发表了论文“解非线性方程的最速下降法”（数学学报），其中首次出现了单调算子的思想. 单调算子概念的正式提出在国际上是 60 年代的事情. 单调性理论现在已成为非线性泛函分析的重要分支. 关肇直还一贯强调应用的研究. 利用泛函分析的技巧，他对于中子迁移理论，电磁波理论，现代控制理论等也做了杰出的工作.

泛函分析在复旦大学是 50 年代末由夏道行教授起始的. 50 年代，夏道行从事单复变函数理论的研究，于 50 年代中后期他转向泛函分析的研究. 夏道行曾去前苏联莫斯科大学进修二年，从师于国际著名数学家 I. M. Gelfand. 在苏期间，他一方面从事泛函分析的广义函数，线性拓扑代数的研究，另一方面开始对“泛函分析与数学物理”的课题产生浓烈兴趣. 59 年他回国后在复旦大学建立了“泛函分析小组”，由当时的青年教师严绍宗，进修教师及研究生等参加，在他的领导下，开展了对于 Segal 的算子代数、Wiener 测度和积分、广义函数、算子理论、量子物理学等方面的研究. 60 年代上半期，夏道行教授等在无穷维空间积分方面开展了系统的研究. 终于在 1965 年出版国际上第一本的“无穷维空间上测度和积分理论”（上册）. 该书后来在国外被翻译成英文，并得到广泛引用. 尽管该书引言中预告了下册的部份内容，但终因文革的开始，研究工作的中断而未能如愿.

众所周知，泛函分析在我国已经有了迅速的发展. 理科和大部分工科院校都将泛函分析作为重要必修课开设. 研究人员也有了巨额的增加. 在这个发展的过程中，关肇直、夏道行、江泽坚、田方增等教授发挥了重要作用.

下面我们就泛函分析在我国的某些发展作较为具体的介绍.

一　无限维空间上测度和积分理论

这个课题起源于随机过程理论，特别是 Wiener 过程的理论. 然而，在许多其他的领域中都出现了同样的问题. 尤其是著名物理学家 R. P. Feynman 提出路径积分（“历史积分”或连续积分，1948 年），引起数学家的极大兴趣. 按照物理学家的观点，物理的真空态相应于无限维空间上某个平移不变的测度，但是数学上却证明这样非平凡的测度是不存在的. I. M. Gelfand 据此提出真空态应当相应于拟不变测度（即平移后的测度与原测度等价）. 在这个背景下，夏道行教授等系统地研究了拟不变测度理论.

设 X 是拓扑空间，B 是 X 中开集全体生成的 σ 一代数，如果 g 是 X 上的双射，且对任何 $A\in B$，gA 及 $g^{-1}A$ 均属于 B，则称 g 是 (X,B) 上的可测同构，令 G 是由 (X,B) 上可测同构组成的变换群. 设 μ 是 (X,B) 上的正则测度，对于 $g\in G$，定 $g\cdot\mu(A)=\mu(g^{-1}A)$，$\forall\ A\in B$. 如果对任何 $g\in G$，$g\cdot\mu$ 与 μ 是等价的，就称 μ 为关于 G 拟不变的.

利用测度论与算子代数的方法，夏道行等得到一系列结果. 例如，设 X 是拓扑群，G 是 X 的子群，G 上有拓扑 τ 使得 (G,τ) 成为第二纲的拓扑群，且从 G 到 X 的嵌入是连续的. 对 $g\in G$，可以定义 X 上的左乘变换 lg. 若 X 上存在有限正测度 μ，它关于群 $\{\mathrm{lg}\,|\,g\in G\}$ 是拟不变的，那么对 X 中每一个有正测度的紧子集 K，存在 (G,τ) 中单位元的领域 V，当 $h\in V$ 时，$\mu(k\cap l_hk)>0$. 由此，夏道行给出了他的著名的夏道行不等式. 夏道行利用对称弱闭算子代数的分解定理，研究了拟不变测度的分解，并证明对偶空间的存在. 在此基础上建立了关于拟不变测度的 Fourier 变换的 L^2- 理论和相应的计算公式. 这个理论有可能成为研究无限多个变量微分方程的有力工具和在湍流理论、统计物理中发挥作用. 最后，夏

道行深入地研究了柱测度的可列可加性与拓扑群上正定函数的表示.作为他的理论应用,夏道行对量子场论交换关系的表示得到一系列的结果.

二 算子谱分析

线性算子谱理论一直是泛函分析中极为活跃并引起广泛兴趣的重要课题.从Hilbert谱论、Riesz谱论,到Von Neumann谱论,大体已确定它在数学中的分支地位.50年代以来又掀起对单个算子谱论的热浪,其代表人物是P. R. Halmos,核心的一句话:用各种方法去研究种种线性算子离正常算子有多近(而正常算子已为人们所深刻了解),即大力开展对非正常算子的研究.文革后期,复旦泛函组(夏道行,严绍宗,李绍宽等)把主要精力投入这一方向,经过多年努力,终于完成专著[4]及以后的一系列论文.

设H是复Hilbert空间,A是H上线性有界算子,A^*是A的共轭算子.如果

$$A^*A - AA^* \geqslant 0,$$

则称A是亚正常算子($A^*A - AA^* = 0$便是正常算子);如果

$$(A^*A)^{\frac{1}{2}} - (AA^*)^{\frac{1}{2}} \geqslant 0,$$

则称A是半亚正常算子,显然亚正常算子必是半亚正常算子,即半亚正常算子类广于亚正常算子类.

如果说国外学者如C. R. Putnam,J. G. Stamfli等等在亚正常算子已进行过多方面的研究,那么夏道行教授的创造在于:①提出"半亚正常算子"概念,并将亚和半亚正常算子统一起来加以研究,这需要克服许多困难;②夏道行教授更以函数论上的深厚功底将原研究提高到一个崭新的阶段,如给出函数模型——一种奇异积分模型——零阶伪微分算子.因此对这两类算子的研究可能有助于更一般的伪微分算子的谱分析,并以函数模型为基础

给出谱决定，谱映照，豫解式的估计，表征函数，精刻函数，函数演算的迹公式等等.

三　不定度规空间理论

设 $(H_\pm, <,>_\pm)$ 是两个复 Hilbert 空间，令 $H = H_+ + H_-$（线性空间直和），并在 H 上取“内积”

$$[,] = <,>_+ + <,>_-, \quad <,> = <,>_+ - <,>_-.$$

显然 $(H,[,])$ 是 Hilbert 空间，但 $<,>$ 不是正定内积，而是不定内积，即 $(H, <,>)$ 是不定度规空间. 对不定度规空间及其算子理论的研究，并不是 Hilbert 空间情形纯逻辑的推广，它有其自身深厚的根基. “相对论”中的“时空”就是不定度规空间，反映物理观察者变更之间的变换，其数学形式是（齐次）Lorentz 群，也就是“时空”（四维）的酉算子全体，不定度规空间最早出现在 P. A. M. Dirac 有关量子理论的文章（1942）中. 从 40 年代到 60 年代，许多数学家关心并研究过它，也取得不少结果. 但与 Hilbert 空间算子论相比，差别甚远，许多 Hilbert 空间上重要结果，甚而是明显事实，在不定度规空间上都不清楚. 此后近 20 年几乎看不到这方面的任何文章. 复旦泛函组（严绍宗，童格孙，陈晓漫等）自 70 年代末起做了系统的工作（例见专著[5] 等）. 核心的结果是给出 Π_k 空间自共轭算子，酉算子的上三角模型：$U(A)$ 是 Π_k 空间上的酉算子（自共轭算子）充要条件是存在标准分解 $\Pi_k = N \oplus \{Z + Z^*\} \oplus P$ 以及六个线性算子 $\{S, U_N, U_P, C, D, T\}$（$\{S, A_N, A_P, F, G, Q\}$）使得

$$U = \begin{pmatrix} S & F & G & B \\ & U_N & O & C \\ 0 & & U_P & D \\ & & & S^{-1*} \end{pmatrix} \begin{matrix} Z \\ N \\ P \\ Z^*, \end{matrix}$$

其中 $F = SC^*U_N$,

$$G = -SD^*U_P,$$

$$B = \frac{1}{2}S(C^*C - D^*D + 2T),$$

$$T = -T^*$$

$$\left\{ A = \begin{pmatrix} S & F & G & Q \\ & A_N & O & -F^* \\ 0 & & A_P & G^* \\ & & & S^* \end{pmatrix} \begin{matrix} Z \\ N \\ P \\ Z^*, \end{matrix} \quad \text{其中 } Q = Q^* \right\}.$$

这个模型是复杂的，但却是有用的，即关于 U，A 的问题都可由此得到回答（当然证明可能是很长的）. 下面举几个应用的例子.

1. Hilbert 上仅具单点谱的酉算子，显然只有单位算子. 然而 Π_k 空间上单点谱的酉算子 $U = \{S, I_N, I_P, C, D, T\}$ $(\sigma(S) = \{1\})$，仍然包含有四个任意性的算子：S, C, D, T .

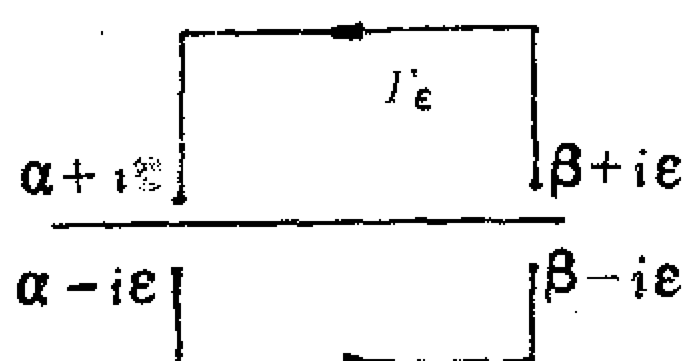
2. Hilbert 空间上自共轭算子 A 有界的充要条件是 $\sigma(A)$ 为有界集，这个事实对 Π_k 空间也是对的，但对 Π 空间不成立. 可以给出 Π 空间上自共轭算子 A，$\sigma(A) = \varnothing$，但 A 是无界的.

3. Hilbert 空间上 Von Neumann 谱扰动理论在 Π_k 空间上成立，即对 Π_k 空间上自共轭算子 A 及任何 $\varepsilon > 0$，存在 Π_k 空间上自共轭的 $H.S.$ 算子 B，$\|B\|_2 < \varepsilon$，使得 $(A + B)$ 的谱全是特征值. Π 空间上不可能有此结果 .

4. Π_k 空间上自共轭算子 A 的任何幂 A^n 仍然是自共轭算子，并且 $\sigma(A^n) = \{\lambda^n | \lambda \in \sigma(A)\}$. 对于平方根也有相应的结果. 自然这些在 Π 空间上不成立.

5. Hilbert 空间谱论中一个重要观念是谱系. 对于 Π_k 空间上自共轭算子 A，利用三角模型计算出下列围道积分：

$$E_\Delta = (\text{强}) \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{\lambda I - A} d\lambda.$$



即给出谱系 $\{E_t\}$ 的明确解析表达式. 上述"围道积分"方案在 60 年代就提出,但从未见到证明. 由于得到 $\{E_t\}$ 的表达式,随之而来的"临界点"(也是前苏联学者首先提出的)的确切定义及其结构就搞清楚了. 在此基础上,建立了谱映射理论.

6. 给出 π 空间上稠定闭算子,对称算子扩张理论,它达到 Von Neumann 相应理论在 Hilbert 空间的程度.

7. Hilbert 空间上压缩算子的酉膨胀问题,显然是 Hilbert 空间上调和分析理论的基础. 对于不定度规空间,相应的问题也得到了解决. 这实际上是 9 个未知数(算子)适合 12 个方程的可解性研究. 在一切可解的情况下,给出了解的全部形式. 这为在不定度规空间上建立调和分析打开道路.

四　算子代数理论

这里的算子代数是指由 Hilbert 空间上有界线性算子组成的 $*$ 代数($*$ 指算子的共轭). 在通常的一些算子拓扑下,它的闭包只有两种: Von Neumann(简写为 VN)代数,(它的抽象是 W^*-代数)及 C^*-代数, VN 代数是 J. Von Neumann 在 1929 年引入的. C^*-代数则是在 40 年代初由 I. M. Gelfand 奠定理论基础的. 考虑量子系统的有界观察量全体,就需要研究算子代数,算子代数的理论特别自 70 年代以来获得了迅猛发展. 目前它与代数拓扑(尤其是 K-理论,纽结理论等),微分几何,及量子物理学等发生了本质的联系,其最杰出的成果在最近的 10 余年内两度得到 Fields 奖. 因此,它是近代数学最重要的领域之一.

关肇直与田方增的文章([8])曾经初步介绍过C^*-代数理论．自70年代中期起，中科院数学所李炳仁（及后来的合作者林青与研究生等）致力于算子代数理论的研究，为我国填补了这方面的空白，并获得一系列结果，举例如下．

1. 1943年，著名数学家I. M. Gelfand与M. A. Naimark在他们关于C^*-代数理论的奠基性文章中，提出如下著名的猜测：C^*-代数A定义中关于范数的基本条件$\|x^*x\| = \|x\|^2$ $(\forall x\in A)$，能否减弱为$\|x^*x\| = \|x^*\| \cdot \|x\|$ $(\forall x\in A)$？这个猜测曾经引起许多数学家的极大兴趣及长期努力，有着大量的文章．终于在1967年得到肯定的解决（后来又有许多发展）．其关键的一步是Glimm-Kadison定理：

设S是具单位元的C^*-代数A的单位球，则$\{e^{ih} | h=h^* \in A\}$的凸包在S中稠．

上面的讨论都是在复数域中进行的，自然要问在实数域中情形如何？在实数域中，类似于Glimm-kadison定理被证明了：

如果A是具有单位元的实C^*-代数，则集合

$$\{\cos b \cdot e^a | a^* = -a, \quad b^* = b \in A\}$$

的凸包在A的单位球S中稠．

由此证明：

如果A是厄米的实Banach ∗ 代数，并且$\|x^*x\| = \|x^*\| \cdot \|x\|$ $(\forall x\in A)$，则A是实C^*-代数．

这个结果肯定地解决了Gelfand-Naimark猜测的实相似情形．

2. 在C^*-代数张量积上引入可结合的C^*-范的概念，并且指出代数张量积上的极大C^*-范是可结合的，因此

$$\max -\bigotimes_{i=1}^{n} A_i = \max -\bigotimes_{l=1}^{k} (\max - \bigotimes_{i\in I_l} A_i).$$

这里$\{I_1, \cdots, I_k\}$是$\{1, \cdots, n\}$的任意分割，由此给出核C^*-代数张量积定理的初等而简单的证明．

3. 完全刻划 GICAR 代数上的迹态空间. 这个结果是有趣的. 熟知杨辉三角形是数集 $\{\alpha_i^{(n)} \mid n \geqslant 0, 0 \leqslant i \leqslant n\}$ 使得 $\alpha_0^{(0)} = 1, \alpha_i^{(n+1)} = \alpha_{i-1}^{(n)} + \alpha_i^{(n)}, \forall\ n, i$(这个系统只有一个解:$\alpha_i^{(n)} = \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix}$). 今考虑倒杨辉三角形 $\{\beta_i^{(n)} \mid n \geqslant 0, 0 \leqslant i \leqslant n\}$: $\beta_0^{(0)} = 1, \beta_i^{(n)} \geqslant 0, \beta_i^{(n)} = \beta_i^{(n+1)} + \beta_{i+1}^{(n+1)}, \forall\ n, i$(这个系统有无穷多个解). 记倒杨辉三角形全体为 Δ,则 Δ 与 GICAR 代数 A 的迹态空间 $\tau(A)$ 仿射同构. 计算出 A 的 K_0- 群 G,则 G 上的态空间 $\varphi(G)$ 也与 Δ 仿射同构. 由于 G 是一列有限 群的递增并,将可得到倒杨辉三角形的等价刻划. 最后,可以指出 $\tau(A)$ 是 Bauer 单纯形,并且其端点集同胚于区间[0,1](这个事实对于有限维空间中的单纯形是不可想象的).

4. 考虑周期作用的 C^*- 动力系统$(C(X), \alpha, \mathbf{Z}_n)$,这里 X 是紧 Hausdorff 空间,α 是 X 的同胚,并且 $\alpha^n = id$. 可以完全刻画 C^*- 叉积 $C(X) \times \alpha\mathbf{Z}_n$ 的纯态空间. 进而,林青给出有理旋转代数分类定理的另外证明.

5. 林青与 Elliott 合作研究高维的非交换环面,指出任何简单的 3-tori 将是四个圆代数直和的诱导极限.

6. 关于实算子代数理论取得较为系统的结果. 例如:给出有限维实 C^*-代数构造定理的算子代数方法的证明;指出实 C^*-代数的拓扑不可约 * 表示也是代数不可约的,即 1-迁移性成立(但 n-迁移性当 $n \geqslant 2$ 时对实 C^*-代数一般不成立,这与复情形是不同的);指出实 VN 代数的第一种分类将可与复情形相对应,然而实 VN 代数的第二种分类不同于复情形,将出现半离散与半连续的实 VN 代数的新现象;等等.

五 非线性泛函分析

前面所讨论的属于线性范围. 非线性泛函分析在理论与应用

方面无疑都具有极大的重要性. 中科院数学所李树杰及其合作者等对于非线性映射，临界点理论及其应用等做了系列的工作，举例如下：

1974 年，著名数学家 L. Nirenberg 提出这样的问题：如果 T 是 Hilbert 空间 H 到自身的非线性连续扩张映射，并且 T 把原点的一个邻域映满到原点的一个邻域，那么是否有 $TH=H$? 1982 年，张恭庆和李树杰就 T 是可微的情形给出了肯定的回答，后来，有人对不可微情形举出反例. 由此，Nirenberg 问题得到解决.

1982 年，冯德兴和李树杰对于单调算子及 Hilbert 空间中多值极大单调算子建立拓扑度理论，这个工作比国外学者为早.

一个下方有界的泛函如果满足著名的 Palais—Smale 条件则一定是强制的，这个事实最早由李树杰和刘嘉荃所发现. 后来，李树杰等又应用 Ekeland 变分原理在更弱的光滑性条件下证明这一结果.

在临界点理论中，刘嘉荃和李树杰引进了下述的局部环绕条件. 设 Banach 空间 X 存在着直和分解 $X=X^1+X^2$，说泛函 f 在 0 点处关于 (X^1,X^2) 满足局部环绕条件是指存在 $\rho,\beta>0$ 使得

$$f(x)\geqslant\beta>0,\forall\ x\in X^1,\ \|x\|=\rho, \tag{1}$$

$$f(x)\geqslant 0,\forall\ x\in X^1,\ \|x\|\leqslant\rho, \tag{2}$$

$$f(x)\leqslant 0,\forall\ x\in X^2,\ \|x\|\leqslant\rho. \tag{3}$$

$$\dim X^2<\infty. \tag{4}$$

他们结合伽略金逼近方法；极大极小方法和 Morse 理论，讨论了 C^1 泛函在下列几种情形中非平凡临界点的存在性：(a) f 是下方有界的；(b) f 是超线性的；(c) f 是渐近线性的. L. Nirenberg 讨论了情形 (a) 但去掉了条件 (1). 接着，李树杰和 M. Willem 讨论了情形 (a) (b) (c) 同时去掉了条件 (1) 和 (4).

李树杰和 T. Bartsch 引进了一个角度条件. 在这个条件下对退化临界点仍能计算它的临界群. 他们还引进了无穷远处的临界群，并建立了 Gromoll—Meyer 的相应理论等. 这些理论已被有效

地运用到非线性微分方程中去.

李树杰和 A. Szulkin 把 P. Rabinowicz 关于非自活超线性 Hamilton 系统和非自治超线性波方程周期解存在性的著名结果向前推进了一步，同时，他们对于渐近线性波方程的情形改进了 Amann 和 Zehnder 著名的结果.

做为临界点理论的应用，丁彦恒和李树杰讨论了一阶 Hamilton 系统的同缩轨问题；位势井中 Hamilton 系统无穷多周期解的存在性；二阶 Hamilton 系统在固定能量面上周期解的存在性；位势井中奇异动力系统周期解的存在性以及椭园组在全空间中整体解的存在性等.

参考文献

[1] 朱广田与冯德兴，关肇直传，中国现代科学家传记，第一集，64—70，科学出版社，1991.

[2] 关肇直，泛函分析讲义，高等教育出版社，1958.

[3] 夏道行，无限维空间上测度和积分论，上海科学技术出版社，1965.

[4] 夏道行，线性算子谱理论 I，科学出版社，1983.

[5] 夏道行与严绍宗，线性算子谱理论 II，科学出版社，1987.

[6] Li Shaokuan and Chen Xiaoman, Advance of operator theory in Fudan University, preprint.

[7] Yan shaozong and Tong Yusheng, Operator theory in indefinite inner product space, preprint.

[8] 关肇直与田方增，赋范环论，数学进展，1 (1955), 223—363.

[9] Li Bingren, Introduction to operator algebras, World Sci., Singapore, 1992, 720p.

[10] Li Bingren, Real operator algebras, preprint.

[11] Shujie Li and A. Szulkin, Periodic solutions for a class of nonautonomous Hamiltonian systems, J. Diff. Equ., 112: 1 (1994), 226—238.

[12] Li Shujie, Some aspect of nonlinear operator and critical point theory, preprint.

注：文献中的 preprints 将包含于正在准备中的书："Functional Analysis in China".

混合型偏微分方程在中国

谷超豪

（复旦大学数学研究所）

一 引 言

变系数的偏微分方程，即使在线性的情况，也是一族非常复杂的研究对象，往往需要区分各种类型予以研究．其中最主要的有椭圆型，双曲型，抛物型等等．但随着系数的变化，方程可以从一种类型变为另一种类型，换一句话，在同一区域中，可有不同的子区域，在其中方程可以有不同的类型．这种方程称谓混合型方程．通常情况下，混合型方程是指椭圆型和双曲型同时出现的方程，当然，在它们交界处，抛物型（或退化椭圆、退化双曲）必然出现．

最早被研究的混合型方程是[1]

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \tag{1}$$

在 $y>0$ 时，这方程是椭圆型的，$y<0$ 时，这方程是双曲型的．意大利数学家 F. Tricomi，用相当精致的分析工具（奇性积分方程），证明了一类混合区域的边值问题的解的存在性和唯一性，后来称这个问题为 Tricomi 问题．如果把（1）改为

$$k(y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,(yk(y)>0,y\neq 0). \tag{2}$$

这方程称为 Chaplygin 方程，这是俄罗斯力学家 Chaplygin 从气体力学中归结出来的经过 Karman—钱学森近似，可得出 Tricomi 方程.

从 20 年代到 50 年代，混合型方程被许多人研究过，有过大量文献，但只限于二自变数的情形. K. O. Friedrichs 正对称方程组理论是多个自变数的，但在当时也只是应用到 Chaplygin 方程的边值问题[2]. 多元的情况，只有个别的三自变数方程有人作过研究，但没有得到解的存在性的结果. 也有人讨论过个别的非常特殊的高阶方程，但限于二元的. 这种情况在西方还持续相当一段时间，以致到 1979 年，M. H. Protter 曾有评论说："对 R^2 中的混合型方程要形成一个系统的理论，在现在还是困难的，至于发展到 3 维和更高的维数，以及研究高于二阶方程，那就更遥远了."[3]这段话在一个侧面反映出混合型方程的难度，但这也表明，他那时还不了解中国数学家 60 年代以来所做的工作.

本文在写作中，参阅了综述性的文章[4],[5],[6].

二　二维的问题

在中国，吴新谋教授在 50 年代中期首先倡导混合型偏微分方程的研究工作. 他和丁夏畦,[7]王光寅,[8]董光昌[9]等应用了"*abc* 方法"，即构造能量不等式的方法，证明了 Chaplygin 方程等的一些边值问题的唯一性定理. K. O. Friedrichs 的正对称方程理论充分显示了能量不等式的作用，据此，吴新谋等工作，也已蕴含了弱解的存在性的结果.

华罗庚教授从全射影平面的 Beltrami 算子出发，得到方程[10]

$$(1-x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+(1-y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2x\frac{\partial u}{\partial x}-2y\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

(3)

这方程最早由空气动力学家 A. Busemann 在研究超音速的锥型流中导出，并由 Lighthill 等人在一系列的力学问题中得到应用，但在数学界并不为人所熟知. 这个方程在单位圆内为椭圆型，单位圆外为双曲型，特征线为单位圆的切线. 经过适当的变换，这方程在单位圆内可化为 Laplace 方程，单位圆外可化为波动方程. 它比苏联人所研究过的 Lavrentev 方程

$$(\operatorname{sgn}\ y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{4}$$

自然的多. 华罗庚仔细分析了方程 (3) 的许多性质，包括群不变的性质，又以 Fourier 展开的形式证明了几种边值问题的解的存在性. 他的研究引起了若干后续工作[11].

齐民友、董光昌等也曾联系混合型方程的需要，研究了退化椭圆型和退化双曲型方程的某些边值问题，得出一系列结果.[4]但严格地说起来，它们不属于混合型方程的范围，这里就不叙述了.

三　高维的二阶方程

M. H. Protter 曾提出三维空间 Tricomi 方程的类似并讨论某一边值问题解的唯一性. 董光昌也研究过这个问题.[12]

谷超豪从气体力学中得到启发，研究了 n 元方程[13]

$$(\delta_{ij}-x_ix_j)\varphi_{ij}+2ax_i\varphi_i-a(a+1)\varphi=f,$$
$$(i,j=1,2,\cdots,n). \tag{5}$$

这里重复的下标表示求和，φ_i，φ_{ij}，表示关于 x_i，x_j 等的偏导数，a 为常数. 这个方程在单位球内为椭圆型，单位球外为双曲型，到单位球的切平面恰为特征方向. 在 $a=-1$，$n=2$ 时，这就是方程 (3). 谷超豪首先把正对称方程组的理论加以发展，然后把 (5) 转换为正对称方程组，从而证明了一系列的边值问题的解的存在性

和唯一性. 特别设 Ω 为包围单位球的区域，$\partial\Omega$ 为适当光滑，并为类空（即切平面和单位球无公共点）时可提边值问题

T_1　　边界条件为 $\varphi\Big|_{\partial\Omega}=0,\quad \dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}=0.$

T_2　　无边界条件.

记 H^k 为 Sobolev 空间 $W^{k,2}$，H_0^k 有支集在 Ω 内的 C^∞ 函数在 H^k 范数下的完备化，他得到如下结果

(i) 如 $a>-\dfrac{n}{2}+k$（k 为非负整数）$f\in H_0^k$；问题 T_1 有属于 H_0^{k+1} 的唯一的强解

(ii) 如 $a<-\dfrac{n}{2}$，$f\in H^k$，问题 T_2 有属于 H^{k+1}的唯一的强解

特别，在 k 充分大时，就能得出经典解的存在性. 值得注意的是在情况（i），闭区域 Ω 的边界上同时给了 Dirichlet 式和和 Neumann 式的边界条件，解仍然存在；在情况（ii），没有任何边界条件，解只能是唯一的. 这仿佛是一种奇怪的现象，但可以显式解来说明. 这表明，定解问题的提法，强烈地依赖于低阶项的系数.

谷超豪又提出了化一般的二阶混合型方程为对称方程组的方法.[14],[15]设有方程

$$L\varphi=h^{ij}\varphi_{ij}+p^i\varphi_i+q^i\varphi=f. \tag{6}$$

这里 (h^{ij}) 所定义的二阶对称阵在区域中至多只有一个负特征值，而在某些子区域，它为正定，又在某些子区域，它确有一个负特征值. 在低阶系数 p^i,q^j，满足一定条件时，所化到的会是正对称组，因而可以按正对称组的一般理论，得到一系列的边值问题的解存在性和唯一性. 岩波数学百科辞典(1977 年英文版）中包含如下的问题：[16]"Friedrichs 的理论中有一个困难，就是没有给出为把给定方程的给定边值问题化为正对称组的可容许问题的统一方法."又说，比 Tricomi 方程或者 Chaplygin 方程"更复杂形式的混合型偏微分方程用 Friedrichs 理论来处理是否可行，尚不得而知."这些问题在谷的著作中已有较好的回答.

谷超豪又考虑了拟线性的情况，[17]他证明充分正的对称双曲方程组

$$\frac{\partial u}{\partial t}+A^i\frac{\partial u}{\partial x_i}+B(x,u)+au$$
$$=\varepsilon f(x,u),\quad (A^i=A^i(x,u)).$$

a 充分大，ε 充分小合格边值条件（和 t 无关）的解，当 $t\to+\infty$时，会收敛于

$$A^i\frac{\partial u}{\partial x_i}+B(x,u)+au=\varepsilon f(x,u) \tag{7}$$

的解，把它应用于拟线性混合型方程，也得出了相应的结论.

洪家兴进一步研究二阶方程（6）[18]，并假定蜕型面取特征方向，他把区域边界 $\partial\Omega$ 分解为 $\partial\Omega=\Gamma\cup\Gamma_s$，其中 Γ_s 为类空，Γ 为非特征，他找出一个和方程组的边界取向有关的不变量 W，考虑方程：

$$(L-\lambda)\varphi=f,\quad (\lambda\ \text{为参数}) \tag{8}$$

的边值问题，边界条件为

(i) $W<0$ 时，$u|_\Gamma=0,\quad u|_{\Gamma_s}=0$

或

(ii) $W>0$ 时，$u\Gamma=0.$ (9)

他证明了下述一般结果：边值问题（8）、（9）具 Fredholm 性质，即除了离散的 $\lambda_0>\lambda_1>\lambda_2\cdots$外，边值问题（8）有属于 H^1 的强解，当 $\lambda=\lambda_k$（$k=0, 1, 2\cdots$）时，问题有解的充要条件为 f 属于 H 的一个余维数有限的子空间，这结果消除了用 Friedrichs 理论时对低阶系数的要求和在 Γ 上寻求合格边界的困难，是很深入的.

四　高阶方程

在国外，只有非常特殊形状的高阶混合型方程，如

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{y}{|y|}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^n u=0$$

曾被讨论过，谷超豪提出了一大类高阶的，多自变数的混合型方程，[19]并解出了一大类的边值问题. 他的作法如下，设：

$$P(\xi,\tau)=\sum_{j=0}^{m}P_{m-j}(\xi)\tau^{j},\quad (\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n) \tag{10}$$

为 $(n+1)$ 个变元的常系数的齐次双曲多项式，τ 为类时变量，即对任何 ξ，$P(\xi,\tau)$ 关于 τ 只有实根. 这多项式对应双曲型方程

$$P\left(\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial \tau}\right)u=F,\quad y=(y_1,\cdots,y_n). \tag{11}$$

令 F 为齐 $a+1-m$ 次函数 $F=t^{a+1-m}f\left(\frac{y}{t}\right)$，令 $u=t^{a+1}\varphi\left(\frac{y}{t}\right)$. 要求 $\varphi\left(\frac{y}{t}\right)=\varphi(x)$，$\left(x_i=\frac{y_i}{t},t=1\right)$，这就得出了方程

$$L(a)\varphi=\left(\sum_{j=0}^{m}P_{m-j}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\prod_{k=1}^{j}\left(a+2-k-x\cdot\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)\varphi=f. \tag{12}$$

这是一个变型的方程，可以看成 R^{n+1} 中 $t=1$ 平面上的方程，变型面就是特征面，在特征面最外层的凸包之外，方程是双曲型的. 取 Ω 为有界区域，$\partial\Omega$ 为类空（即切平面和特征面无公共点），谷考察方程（12）的边值问题：

T_1　边界条件为 $\partial\Omega$ 上 $\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial n}=\cdots=\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^{m-1}\varphi=0$

和

T_2　无边界条件.

得到的结果是：

(i) 如 $a>m+k-\frac{n}{2}-\frac{3}{2}$，$f\in H_0^k(\Omega)$，方程（12）在 $H^{k+m-l}(\Omega)$ 中有唯一的分布解（问题 T_1）；

(ii) 如 $a<-\frac{n}{2}-\frac{3}{2}-1$，$f\in H^k(\Omega)$，方程(12)在 $H^{k+m-l}(\Omega)$中有唯一的分布解（问题 T_1）.

其中 l 是方程 $P(\xi,\tau)=0$，$(\xi\neq 0)$ 关于 τ 的根的最高重数（可随 ξ 而变）的最大值.

可以利用双曲型方程的基本解而写出解的表达式.

由于双曲多项式非常多，所以这里包含了大量的混合型方程. 例如要求电介质中的 Maxwell 方程的相似解，就会遇到这种偏微分方程.

洪家兴继续谷的研究，他不从双曲组出发，直接地提出了变系数的混合型方程[20]

$$P(x,D) = P_m(x,D) + P_{m-1}(x,D) + \cdots \tag{13}$$

他要求特征面是变型面，他研究由两个和球同胚的 $(n-1)$ 维曲面所围成的区域，在外边界和内边界，(13) 的特征个数不相同（因而算子在 Ω 是变型的），他找到一个不变量 W，分别在 $W>0$ 和 $W<0$ 的情况，给出了 Lopatinski 类型的边界条件，得到了如下的结果，在所说的边界条件下，方程：

$$(P(x,D) - \lambda)\varphi = f \tag{14}$$

具 Fredholm 性质

洪的结果大大推进了谷的工作，对于非主型的偏微分方程的边值问题，是一个重要的贡献，不过，它不能覆盖方程 (12) 在 $l>1$ 时的结果.

五　关于二阶混合型方程的分类

二阶混合型方程一般可分为两种类型，第一类方程，特征面不是蜕型面，如 Tricomi 方程；第二类方程特征面是蜕型面，如方程 (3). 根据上面的讨论，第二类方程的边界条件的合理提法和方程的低阶项密切相关，有时要求双曲域的边界条件能决定整个双曲域的解（如问题 T_1）有时甚至在双曲域中不必给出边界条件（如问题 T_2）

对于第一类方程，如

$$Lu = y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = f. \tag{15}$$

边值问题的提法有过许多研究，孙龙祥给出了一个相当精致的结果,[21,22]对于某些边值问题（Tricomi 型的边界条件及其推广），不论 a，b，c 取值如何，方程

$$(L-\lambda)u=f \tag{16}$$

的相应的边值问题总是 Fredholm 型（有时只对 a 在某一点的取值有所限制）.

但是第一类，第二类方程的合理边值问题提法的这种差别并不是绝对的，谷超豪以扩幅螺旋波方程为例,[23]证明了一个第一类方程，其边值问题的合理提法和第二类方程一样. 从而推出，第一类方程和第二类方程的差别只是小范围的，从大范围来看，第一类方程在双曲域如果整体双曲性受到破坏，边界条件的提法也会因之而变化.

这一事实也可以从另一观点得出：如果对在蜕型面附近方程的系数作一微扰，方程很可能由第二类转为第一类，但正对称方程组的理论是容许微扰的（只要方程是充分正），而在边界可未受到微扰，那末边界条件提法不变. 所以我们可断言，合理边界条件的提法仅按蜕型面是否为特征而定这一点还是不充分的.

六　几何应用

孙和生将混合型方程的唯一性定理用于研究 Gauss 曲率变号的曲面能否容许无穷小变形的问题,[24,25]得到若干相应的刚性定理，设曲面的方程为 $z=f(x,y)$，它的无限小变形应满足方程

$$f_{yy}u_{xx}-2f_{xy}u_{xy}+f_{xx}u_{yy}=0. \tag{17}$$

因为 Guass 曲率 K 和 $\Delta=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=0$ 同号，所以（17）是混合型方程. 如果在某些边界条件下，（17）只有零解，那末曲面在满足那样的边界下不存在无限小变形，因而也不可能存在依赖于一个参数的连续变形，孙和生的一系列关于唯一性的工作指出了这

种情况.

一个二维的 C^∞ 流形 M_2 是否能等距嵌入到三维欧氏空间 E^3 去？这是一个古老而困难的问题，要求解一个 Monge—Ampere 方程. 当二维流形的 Guass 曲率 K 为变号时，这方程是混合型的. 林长寿证明了[26]，设 $p\in M_2$，$K(p)=0$，$(dk)p\neq 0$，在 M_2 中必存在 p 的一个邻域 0_p，使得 0_p 能等距嵌入到 E^3. 这是一个局部性质的嵌入定理，但也相当困难. 洪家兴推进了这个结果，[27]设 M_2 是含一个单连通区域 Ω，其边界 $\partial\Omega$ 为充分光滑，在 $\partial\Omega$ 上，$k=0$，$dk\neq 0$，在 Ω 内部 $K>0$. 那末必存在一个包含 Ω 的区域 Ω_1，它能等距嵌入到 E^3. 这是一个半整体的结果，其证明有颇高的难度. 如果 M_2 是完备的变曲率二维流形，它何时能等距嵌入到 E^3，这仍然是一个未解决的问题，特别是双曲域的嵌入，还有很多工作要做，洪家兴已取得很多进展.

另一个几何应用是求作 Minkowski 空间 R^{2+1} 中的混合型极值曲面，它是指 C^2 的曲面，其平均曲率$=0$，曲面同时包括类空部分和类时部分. 利用 Legendre 变换，可将曲面的制作归于解方程(3). 谷超豪利用这一事实，得出了这种曲面的整体结构方法，证明了这种曲面的解析性和许多几何性质，[28]他又指明在高维空间中的这种曲面，也可以用类似的方法做出来. 此外，他还证明了以零长曲线孤为部分边界的广义极值曲面的存在性问题，这可以作为 R^3 中的 Plateau 问题的类似，但还只是一种特殊情形.[29]

七 结 束 语

混合型偏微分方程在中国的发展，首先应归功于吴新谋教授的倡导以及他和他的合作者们的研究工作. 华罗庚教授在进行许多重要研究的同时，也促进了这个领域的发展. 到 60 年代以后，在国外、国内从事这个领域的工作者的数目变少了. 但混合型偏

微分方程在理论上是不能绕过的一个领域，同时在气体力学中，以及微分几何中，还有许多感兴趣的重要问题尚待解决. 如果在这些问题上有进一步的突破或方法有新的进步，这个研究方向仍然会是很吸引人的.

参考文献

[1] F. G. Tricomi, Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di seconde ordinee di tipo misto, Rend. Reale Accad. Lincei, Ser14 (1923), 133—247.

[2] K. O. Friedrichs, Symmetric positive linear differential equations, Comm. Pure Appl. Math., 11 (1958) 333—414.

[3] M. H. Protter, Bull Amer. Math. Soc., 1 (1979), 534—538. (书评).

[4] G. G. Dong and M. Y. Chi, Influence of Tricomi's mathematical work in china, Mixed type equations, Teubner-Text zur Mathematik, 90. 1986.

[5] C. H. Gu and J. X. Hong, Some developments of the theory of partial differential equations of mixed type, Teubner-Text zur Mathematik, 90. 1986.

[6] C. H. Gu and J. X, Hong, Some developments of the theory of Mixed PDE's, Partial Differential Equations in China, 1994 Kluwer Academic Publishers.

[7] 吴新谋，丁夏畦，查普里根方程的特里谷米问题的唯一性，数学学报 5 (1955) 335—349.

[8] 王光寅，关于查普里根方程的特里谷米问题解的唯一性，数学学报 5 (1955) 455—461.

[9] 董光昌，查普雷金方程的唯一性定理（Ⅱ），数学学报 6 (1956) 250—262.

[10] 华罗庚，Lavrentev 的混合型方程，数学学报 15 (1965) 873—882.

[11] X. H. Ji and D. Q. Chen, The Tricomi's problem of the nonhomogenous equations of mixed type in the real projective plane, Mixed type of equations, Teubner-Text zur Mathematik, 90. (1986).

[12] 董光昌，一个空间混合型方程组的边值问题，浙江大学学报 1965 1—6.

[13] C. H. Gu, On some differential equations of mixed type in n dimensional space, Scientia Sinica, (1965), 1574—1581.

[14] 谷超豪，n 自变量混合型偏微分方程的边值问题，科学通报，67 (1978)，335—339.

[15] C. H. Gu , On partial differential equations of mixed type in n independent variables, Comm. Pure Appl. Math. , 34 (1981), 333—345.

[16] Japanese Mathematical Society, Encyclopedic dictionary of Mathematics, 1977. 岩波数学百科辞典，1977 英译本，中译本 1915 页 .

[17] 谷超豪，拟线性正对称方程组的边值问题及其对混合型方程的应用，数学学报 21 (1978)，119—129.

[18] J. X. Hong, On boundary value problems for a class of equations of mixed type with characteristic degenerate surfaces, Chin. Ann. of Math. , 2 (1981), 407—424.

[19] C. H. Gu, On a class of mixed partial differntial equations of higher order, Chin. Ann. of Math., 3 (1982), 503—514.

[20] J. X. Hong, Boundary value problems for differential operators with characteristic degenerate surfaces, Chin. Ann. of Math., 5 (1984), 277—292.

[21] 孙龙祥，一类二阶混合型方程的边界问题，中国科学 A (7) (1987) 673—683.

[22] 孙龙祥，广义 Tricomi 问题解的正则性，数学学报 30 (1987) 419—432.

[23] C. H. Gu, The mixed equations for amplifying spiral wave, Letters in Mathematical Physics, 16 (1988), 69—76.

[24] 孙和生，从几何中提出的一些偏微分方程问题，数学学报，10 (1960), 288—315.

[25] Sun Hesheng, On the Tricomi problem of infinitesimal deformation for surfaces with mixed curvature, Scientia Sinica 24 (1981) 1327—1339.

[26] C. S. Lin, Local isometnic embedding in R^3 of two-dimensional Riemannian marifold with Gaussian curvature changing Sign clearly, Comm Pure Mopl. Math. 39 (1986) 867—887.

[27] J. X. Hong, Dirichlet problems for general Monge-Ampere equation Math. Zeitshrift. 209 (1992) 289—306.

[28] C. H. Gu, Complete extremal Surfaces of mixed type in 3-dimentional Minkowski space, Chin. Ann. Math. 15B (1994) 385—400.

[29] C. H. Gu, A class of boundary problems for extremal surfaces in Minkowski, 3-space, J. Rein Answ. Math. 385 (1993) 195—202.

系统控制的数学理论在中国的若干发展

陈翰馥

（中科院系统科学所）

一　概　况

系统控制是系统科学、工程技术、计算机和数学的交叉学科. 各种类型的工业过程，航天、航空、航海系统、信息高速公路、机器人和其它高新技术领域都离不开系统控制. 除了科学院和理科大学的系统控制专家外，国内工科院校及工业部门的科研机构有一大批出色的系统控制领域的专家和工程技术人员. 他们在上述诸领域中作出了巨大贡献，但叙述他们的成就，超出了本文的范围.

工程上控制技术的应用可以追溯到上一个世纪，但它成为一个独立的学科，已经是 20 世纪的事了. 美国数学家 N. Wiener 于 1948 年发表的《控制论，或关于动物和机器中控制和通讯的科学》是控制发展过程中的一个里程碑式的工作. 书中提出的思想、概念和方法，结合工程技术得到很快的发展. 我国著名学者钱学森 1954 年在美国出版的专著《工程控制论》是这时期的一本名著，在国际上有巨大影响. 在前苏联，相应的工作叫“自动调节原理”. 到本世纪 50 年代末、60 年代初，由于工程技术的发展，对控制提出了快速、精确、实时的要求，而计算机的发展为实现这种要求提供了可能. 和这种形势相适应，控制理论从它的经典阶

段“自动调节原理”发展到“现代控制理论”. 标志这个转折的公认的三个里程碑式的工作是 Понтрягин 极大值原理，Bellman 动态规划和 Kalman 滤波及其线性状态空间理论. 引人注目的是这三方面的工作都属数学性质，这就不难理解数学对系统控制的作用，以及反过来工程技术对数学的推动.

30 年来控制理论发展迅猛，用到广泛而深刻的数学工具. 按控制系统的性质分类，对非线性系统，常用微分几何、微分代数为主要工具；对无穷维系统，用泛函分析、偏微分方程为工具；对随机系统用随机过程、概率统计为工具；对离散事件动态系统用代数、图论、离散数学、计算数学、组合数学等为工具. 按问题性质分类，又有系统辨识，最优控制，适应控制，状态滤波，稳健（鲁棒）控制，H^{∞}-优化等，涉及算子理论、非光滑分析、粘性解、随机微分方程、随机过程等数学问题.

我国数学工作者研究系统控制起步不算太晚. 60 年代初，正值国际上现代控制理论起始发展阶段，钱学森教授及时注意到这一动向，在他的积极倡导和支持下，在关肇直教授主持下，和当时的国防科委五院联合在中国科学院数学研究所成立了控制理论研究室. 由关肇直任主任，宋健任付主任. 该室研究人员不仅从事数学控制理论研究，并且联系实际，以期理论和应用相互促进. 现代控制理论在中国受到研究单位和高等院校的广泛重视，并得到迅速发展，关肇直教授对此作出了公认的杰出贡献.

二　分布参数系统

关肇直和宋健是中国研究分布参数控制系统的创始人. 分布参数系统指它的动态是由偏微分方程等描述的无穷维系统. 宋健曾提出一系列有意义的分布参数系统的控制问题. 到 70 年代，关肇直和宋健等人研究以导弹为背景的细长体的弹性振动控制系统

模型和反馈控制方案，得到这类系统的谱的确切结构，阐明了闭环系统渐近稳定性的条件．它的物理意义是相应的开环系统的近似能控和能观测．这是一个切合实际的合理条件，而国外学者当时在研究这一问题时，总不得不加上不自然的增益系数要很小的假设．他们还得到了弹性振动控制系统的极点配置公式．这些研究结果为实际应用奠定了理论基础，得到国内外学者公认．由宋健和关肇直主持的项目"细长飞行器弹性控制理论研究"于 1982 年获得国家自然科学二等奖[1-5].

与有穷维系统相比，分布参数系统的稳定性要复杂得多．1981 年 Pritchard 和 Zabczyk 提出猜想：无穷维系统 L^p-稳定等价于指数稳定．对 Hilbert 空间情形我国学者成功地解决了这个猜想[6,7]，并得到无穷维线性系统稳定性的一系列新结果[8]．对极点配置问题，得到可配置的充分条件和极点配置的无穷级数表达[5,9,10,11]，建立了对有穷维和无穷维非线性控制系统统一适用的近似能控性理论[12,13]．柔性结构系统控制是高技术领域中的重要研究课题．近年来不少学者致力于结构阻尼机制的研究．文献[14]给出了非负自伴算子平方根的表达，为平方根阻尼模型的应用提供了很好的理论依据，得到了国外同行好评．

对分布参数系统的最优控制，李训经、雍炯敏等人做了一系列有影响的工作．利用无限维向量测度[15]，指出对无限维线性系统，等时区可能不凸，但闭包必凸，并导出最优时间的计算公式．对非线性的无穷维系统，只要终端约束是有限余维数的，证明了极大值原理[16]．利用 Ekeland 变分原理证明，对始端终端混合约束的无穷维系统，只要空间具有一定光滑性和约化的终端约束具有有限余维数，则极大值原理成立[17]．对由 Volterra-Stieltjes 型方程描述，以及由半线性、拟线性椭圆型和抛物型偏微分方程描述的并有点约束的最优化控制问题，得到了极大值原理[18,19]．他们在最优控制方面的工作得到同行的好评，在国外引起了后续研究，现已总结成专著[20]．对随机系统，彭实戈给出了控制项含控

制且控制区域未必凸时，一般形式的随机极大值原理[21]，并从随机极大值原理出发，导出了倒向随机微分方程的讨论[24,23]，即在随机终端约束下，求随机微分方程的适应解，给出了解的存在唯一性定理[24]，有关工作应邀在94'国际数学家大会上作45分钟报告．张嗣瀛对微分对策，证明了双方极大值原理[25,26]，并把它用来解决实际问题，得到同行们很高评价．

三 随机系统

在随机系统领域，陈翰馥、郭雷等人做出了一系列在国际上有影响的工作．在状态估计和随机控制方面，给出了随机能观测性和能控性的新定义[27]，既适用于确定性系统也适用于随机系统．当系统随机能观时，建立了缺初值状态估计的递推公式．解决了二次指标下奇异控制和奇异对策问题．总结这些结果的专著[28]被英国Davis教授评价为："该书提供了处理适应系统复杂问题的丰富思想和技巧，……，是这一领域中科研工作者的必备书籍．"

对基于随机梯度算法的适应控制，首次给出了使算法收敛到真值的充分条件，并采用"小激励"法，使控制精度任意地接近最优，同时参数估计趋于真值[29,30]．这项工作被认为是1955到1985年三十年间适应控制领域的"最重要论文之一"，被选录在IEEE出版的适应控制专集中．然后，"小激励"法进一步发展到"衰减激励"法，用此成功地解决了既使性能指标最优，又使估计收敛到真值的适应控制问题，其中包括"二次性能指标"[31]，"信号跟踪"[32]，"模型参考"及"极点配置"等适应控制问题，并应邀为美国《Control and Dynamic Systems：Advances in Theory and Applications》专集写了特约论文[33]．主编在序言中评价"衰减激励"方法是"处理适应控制的强有力方法"．对实际中常用的

最小二乘辨识，首先针对包括一类未建模动态特性的系统，给出了估计的收敛性及收敛速度[34]，然后又对无模型误差的系统给出了精确的收敛速度[35]．这个结果被国际上同行大量引用．基于最小二乘的自校正调节器，从1973年提出以来，在工业过程中得到大量成功应用，在近二十年时间里，国际上许多控制理论专家致力于证明它的收敛性和最优性．但最终解决属于［36］．“IEEE Trans Autom. Control”的编委会在91年第7期的首页上评价此文“完整而又严格地解决了这一吸引了随机适应控制领域内研究者大量兴趣的悬而未决的问题”．美国、法国的学者在公开发表的论文中，分别称这项工作为“重大突破”，“最重要结果”．在此基础上，进一步精细的工作建立了自校正调节器的对数律[37]，使郭雷荣获国际自动控制联合会第12届世界大会“青年作者奖”．陈翰馥、郭雷提出新的信息准则，解决了ARMAX型反馈控制系统阶、时滞估计[38,39,40]，同时又能估出模型系数，并使性能指标达最优．国外学者在论文中相继指出“这是反馈控制系统阶估计的首项工作”，引起很多后续研究．对时变参数系统，提出了“条件激励”的新思想[41]，对实际中常用的典型算法，给出了统一适用的稳定性条件，在国际上首次建立了非平稳相关随机信号下，一般时变参数估计算法的稳定性及收敛性理论[41,42,43]．“IEEE Trans. Autom. Control”编委会在90年2期的首页上介绍［41］时，称它“在回归向量极弱的条件下”得到估计误差的“极精确上界”．

陈翰馥和郭雷等在1990年以前在辨识和适应控制方面的主要结果反映在他们的专著［44］中．美国“数学评论”刊登了Pasik-Duncan教授对该书的评价：“由国际知名专家写的这本专著，……，写得极为出色，它展示了该领域的理论方法和分析技巧，其中包括作者首创的若干强有力方法，……，它必将激励对该领域的研究兴趣”．

对带噪声的开环系统的辨识在国际上有大量研究．［45，46］研究传递函数辨识，根据样本长度来调整模型集的复杂度．这项

工作在国际上有一定影响. [47] 不对噪声建模，用补偿办法，得到对系统参数的无偏估计. [48] 反映了国内学者在连续时间随机控制方面的部分工作.

四 线性和非线性系统

在线性和非线性系统方面，黄琳，韩京清等人做出了有影响的工作. 线性系统的极点配置对工程实际有重要意义. [49] 给出了系统能任意极点配置的充分必要条件，它虽比 Rissanen 相应的工作晚了几年，但这是我国学者在六十年代初独立发现的一个重要定理. 对线性系统，通过向量组的最小多项式阵，对状态空间和多项式两种描述，找到了统一的理论基础和自然的等价关系. 在此基础上，创造了线性控制系统理论的构造性方法，可以统一处理系统的两种描述[50]. 对广义线性系统得到了系统正常化条件、动态补偿器的设计方法、广义系统的内模原理、极大值原理以及次最优控制等[51,52]，而其中大部分结果总结在专著 [53] 中，受到广泛引用.

在线性系统的稳健（鲁棒）控制领域，国际上流行的是 H_∞理论及以 Харитонов 定理为代表的判别区间多项式稳定性的准则. 在后一个方向，一种自然的想法是把多项式定义域从区间推广到任意集合. 我国学者在这方面的贡献是 [54，55] 提出的棱边定理，当区域为凸多面体时，只要多项式在棱边上稳定就能保证它在区域内稳定. 这个工作获得很高评价，受到国内外广泛引用，并且很自然地推广到更一般情形以及各种变异 [55，56].

对非线性系统，从七十年代开始，国际上流行用微分几何、微分代数方法来研究. 我国学者对时变系统线性化及带输出系统线性化给出了充分必要条件[57]，得到很好评价. 在状态空间为李群而输出空间为傍系空间的情况下，给出了系统能观测性的充分必

要条件[58]. 通过对观测器误差线性化的方法，给出了一种非线性观测器的设计方法[59]. [60]在研究仿射非线性系统时，引入 Whitney 拓扑，证明在一般情况下，能线性化的系统是一个零测集，并得出一类非线性系统能反馈线性化的充分必要条件. [61，62] 用微分代数方法研究了非线性控制系统的结构及综合问题. 而 [63，64，65] 则在研究非线性系统时引入新的方法，导出了一种“跟踪微分器”，它能产生信号，弱收敛到感兴趣的信号的广义导数，形成独立于非线性因素及系统干扰的非线性状态观测器，从而设计出的控制器能有效地消去系统的非线性. 结果表明这样设计的“非线性 PID”有很强的适应性和鲁棒性.

我们在概况中已谈到，系统控制理论范围很广，而本文只涉及分布参数系统、随机系统、及线性和非线性系统三方面. 即使在这三个领域内，本文又限于数学理论. 范围缩得较小，但国内工作的人很多，再加上我本人知识面及信息源的局限，难免把应该列入本文的重要工作遗漏. 如有此等情况，决非本人意愿，谨在此先表歉意.

文献目录

[1] 王康宁、关肇直，弹性振动的镇定问题，中国科学，17 (1974)，4，335-350.

[2] 宋健、于景元，带常微分反馈控制器的分布参数系统理论，中国科学，18 (1975)，281—310.

[3] 王康宁、关肇直，弹性振动的镇定问题（Ⅱ），中国科学，19 (1976)，4，323—346.

[4] 宋健、于景元、朱广田、毕大川，细长飞行器自动驾驶仪设计的分布参数系统理论，宇航学报，2，1980，1-20.

[5] 冯德兴、朱广田，弹性振动系统的镇定和极点配置问题，中国科学，A 辑，25 (1982)，5，548—560.

[6] Huang Falun, Characteristic conditions for exponential stability of linear dynamical systems in Hilbert spaces, Ann. of Diff. Eqs., 1 (1985), 1, 43—55.

[7] 黄发伦、刘康生，关于 Hilbert 空间中的线性动力系统指数稳定的一个问题，科学通报，No，3，1987.

[8] Huang Falun, Some problems for linear elastic systems with damping, Acta Mathematica & Scientia, Vol. 10, No. 3, 319—326, 1990.

[9] 刘嘉荃，一类线性算子的一秩扰动与极点配置问题，系统科学与数学，2 (1982)，2，81—94.

[10] 王康宁、吕涛、邹振宇，分布参数控制系统的极点配置问题，中国科学，A 辑，25 (1982)，172—184.

[11] 孙顺华，完全可控线性系统的谱分布，数学学报，21 (1978)，3，193—205.

[12] Zhou H. X., Approximate controllability for a class of semilinear abstract equations, SIAM J. Control and Optim., Vol. 21, No. 4, pp. 551—565, 1983.

[13] Zhou H. X., Controllability properties of linear and semilinear abstract control systems, SIAM J. Control and Optim., Vol. 22, No. 3, pp. 405—422, 1984.

[14] Yao Peng-Fei, De-Xing Feng, Structure for nonnegative square roots of unbounded nonnegative self-adjoint operators, accepted for publication in the Quaterly Journal of Applied Mathematics.

[15] Li X. J. , Y. L. Yao, Time optimal control of distributed parameter systems, Scientia Sinica, 24 (1981), 455—465.

[16] Li X. J. , Y. L. Yao, Maximum principle of distributed parameter systems with time-lags, Lecture Notes in Control and Information Science, Vol. 75, 1985, 410—427.

[17] Li X. J. , J. M. Yong, Necessary conditions for optimal control of distributed parameter systems, SIAM J. Control and Optim. , 29 (1991), 895—906.

[18] Yong J. M. , Pontrayin maxmum pinciple for semilinear second order elliptic partial differential equations and variational inequalities with state constraints, Diff. Int. Eqn. , 5 (1992), 1307—1334.

[19] Yong J. M. , Infinite dimensional Volterra-Stieltjes evolution equations and related optimal control problems, SIAM J. Control and Optim. , 31 (1993), 539—568.

[20] Li X. J. , J. M. Yong, Optimal Control Theory for Infinite Dimensional Systems, Series of Systems and Control: Foundations and Applications, Birkhäuser, Boston, 1994.

[21] Peng S. G. , A general stochastic maximum principle for optimal control problems, SIAM J. Control and Optim. , 28 (1990), 966—979.

[22] Peng S. G. , Backward stochastic differential equation and its application in optimal control, Appl. Math. Optim. (to appear).

[23] Peng S. G. , Stochastic Hamilton-Jacobo-Bellman equation, SIAM J. Control and Optim. , 30 (1992), 284—304.

[24] Pardoux P. , S. G. Peng, Adaptive solution of a backward stochastic differential equation, System and control Letters, 14 (1990), 55—61.

[25] 张嗣瀛，关于定量与定性微分对策，自动化学报，Vol. 6, No. 2, 1980.

[26] Zhang S. Y. , A new approach of solving qualitative differential games and determining the boundary of controllable region, The 8th IFAC World Congress, Preprints, Vol. IX, 1981, 128—133.

[27] Chen, H. F. , On stochastic observability and controllability, Automatica, Vol. 16, No. 2, 1980, 179—190.

[28] Chen H. F. Recursive Estimation and Control for Stochastic Systems, John Wiley, New York, 1985.

[29] Chen H. F. , Recursive system identification and adaptive control by use of the modified least squares algorithm, SIAM J. Control and Optimization, Vol. 22, No. 5, 1984, 758—776.

[30] Chen H. F. , P. E. Caines, Strong consistence of stochastic gradient algorithm of adaptive control, IEEE Trans. on Autom. Control, Vol. AC-30, No. 2, 1985, 189—192.

[31] Chen H. F. , L. Guo, Optimal adaptive control and consistent parameter estimates for ARMAX model with quadratic cost, SIAM J. Control and Optimization, Vol. 25, No. 4, 1987, 845—867.

[32] Chen H. F. , L. Guo, Asymptotically optimal adaptive control with consistent parameter estimates, SIAM J. Control and Optimization, Vol. 25, No. 3, 1987, 558—575.

[33] Chen H. F. , L. Guo, Adaptive control with recursive identification for stochastic linear systems, in Leondes (Ed.) Control and Dynamic Systems, Vol. 26, Part 2, Adacemic Press, 1987, 227—331.

[34] Chen H. F., Strong consistency and convergence rate of least squares identification, Scientia Sinica (Series A), Vol. 25, No. 7, 1982, 771—784.

[35] Chen H. F., L. Guo, Convergence rate of least squares identification and adaptive control for stochastic systems, Int. J. Control, Vol. 44, No. 5, 1986, 1459—1476.

[36] Guo, L., H. F. Chen, The Åström-Wittenmark self-turning regulator revisited and ELS-based adaptive trackers, IEEE Trans. Automatic and Control, Vol. 30, No. 7, 1991, 802—812.

[37] Guo L., The logarithm law of self-turning regulators, in Proc. of the 12th IFAC World Congress, Vol. 1, 227—232, Sydney, 1993.

[38] Chen H. F., L. Guo, Consistent estimation of the order of the stochastic control systems, IEEE Trans. on Autom. Control, Vol. AC-32, No. 6, 1987, 531—535.

[39] Huang D. W., L. Guo, Estimation of nonstationary ARMAX models, based on Hannan-Rissanen method, The Annals of Statistics, Vol. 18, No. 4, 1990, 1729—1756.

[40] Chen H. F., J. F. Zhang, Identification and adaptive control for systems with unknown orders, time-delay and coefficients (uncorrelated noise case), IEEE Trans. on Autom. Control, Vol. AC-35, No. 8, 866—877.

[41] Guo L., Estimating time-varying parameters by Kalman filter based algorithm: stability and convergence, IEEE Trans. Autom. Control, Vol. 35, No. 2, 1990, 141—147.

[42] Zhang, J. F., L. Guo and H. F. Chen, *Lp*-stability of tracking errors for time-varying systems, Int. J. of Ad. Control and Signal Processing, Vol. 5, 1991, 155—174.

[43] Guo L., On adaptive stabilization of time-varying stochastic systems, SIAM J. Control and Optimization, Vol. 28, No. 6, 1990, 1432—1451.

[44] Chen H. F., L. Guo, Identification and Stochastic Adaptive Control, Birkhäuser, Boston, 1991.

[45] Ljung L., Z. D. Yuan, Asymptotic properties of black-box identification of transfer functions, IEEE Trans. Autom. Control, Vol. 30, 1985, 514—531.

[46] Yuan Z. D., L. Ljung, Unprejudiced optimal openloop input design for identification of transfer functions, Automatica, Vol. 21, No. 6, 1985, 697—708.

[47] Feng C. B., W. X. Zheng, On-line modified least-squares parameter estimation of linear systems with input-output data polluted by measurement noises, Proc. of 8th IFAC/IFORS Symposium on Identification and System Parameter Estimation, Beijing, 1988, Vol. 2, 1189—1194.

[48] Situ R., Theory and application of stochastic differential equations in China, Contemporary Mathematics, 118, Amer. Math. Society, 1991, 263—280.

[49] 黄琳、郑应平、张迪，李亚普诺夫第二方法与最优控制器分析实际问题，自动化学报，Vol. 2, No. 4, 1964.

[50] 韩京清，线性空间上的控制系统，"控制理论与应用"2卷，1期，pp. 21—35, 1985.

[51] Wang Enping, Local maximum principle for singular discrete-time linear systems, Systems Science and Mathematical Sciences, 4 (3), 1991, 236—343.

[52] 王恩平、王朝珠，广义离散随机线性系统的最优递推滤波方法 [Ⅰ]、[Ⅱ]，自动化学报，14：6，1988.

[53] Dai L. Y., Singular control systems. Lecture Notes in Control and Information Sciences, 118, Springer-Verlag, 1989.

[54] Barlett A. C., C. V. Hollot and L. Huang, Root locations for an entire polytopy of polynomials: It suffices to check the edges, Mathematics of Control, Signals and Systems, No. 1, 1988, 61—71.

[55] Huang L., L. Wang, Value mapping and parameterization approach to robust stability analysis, Science in China (Series A), Vol. 34, No. 10, 1991, 1222—1232.

[56] 王恩平，多项式族的稳定性分析，中国科学，A 辑，第 5 期，1992，409—495.

[57] Cheng D., A. Isidori, W. Respondek and T. J. Tarn, Exact Linearization of nonlinear systems with outputs, Mathematical Systems Theory, Vol. 21, 1988, 63—83.

[58] Cheng D., W. P. Dayawansa and C. F. Martin, Observability of Systems on Lie groups and coset spaces, SICOPT, Vol. 28, No. 3, 1990, 570—581.

[59] Xia X., W. B. Gao, Nonlinear observer design by observer error linearization, SIAM J. Control and Optimization, Vol. 27, No. 1, 1989, 199—216.

[60] 程代展、秦化淑、李树荣，非线性控制系统的拓扑结构，自动化学报，Vol. 17, No. 1, 1991.

[61] Zheng Yu Fan, Cao Li, Reduced inverse for controlled systems, Math. Contr. Sign. Sys. (MCSS), 6 (4), 1993.

[62] Li Cao, Yu Fan Zhang, On minimal compensator for decoupling control, Syst. & Contr. Lett. 18 (1992), 121—128.

[63] 韩京清、王伟，非线性跟踪-微分器，系统科学与数学，N. 2，1994.
[64] 韩京清，非线性 PID 控制器，自动化学报，No. 4，1994.
[65] 韩京清，一种新型控制器-NLPID，(投)控制与决策，1994. 5.

力学与物理学中非线性发展方程的研究

周毓麟　郭柏灵
（北京应用物理与计算数学研究所）

§1 引　　言

1. 科学与工程技术的发展使人们对自然现象的揭示不能再满足于线性化与局部化的分析研究方法了．要求直接对于非线性过程与非线性现象有所掌握与描述．但是对于偏微分方程，线性的或者非线性的，人们求解的能力极为有限．这个困难自从40年代数字电子计算机的问世，尤其是以后的极其迅速的发展及其处理能力极大的提高以来，有了根本的改变．对于极为复杂的非线性偏微分方程式或方程组的问题常常可以算出所要求精度的近似解来．不仅可以从中知道非线性运动的结果，还可以知道运动变化过程的细节．这种优越的条件使人们感到非常有必要更多地去理解与掌握这些非线性运动的规律与过程．因为对这些现象理解与掌握得不够，很妨碍人们深入与运用得到的计算结果，甚至于人们还不能很好地去判断计算结果与见到现象的可靠性．为了使人们弄清与验证从三种科学研究基本手段中的新兴的计算模拟方法给出的结论等，对非线性分析与非线性偏微分方程问题的近代理论研究就越来越增强数学家们的兴趣与责任感，吸引去研究各种各样从实际科学的理论研究与应用研究中出现的非线性偏微分方程问题的大范围的适定性、整体解的存在性、唯一性、正则性，及

其渐近性、破裂性，长时间的性态等等的数学理论.

浅水运河中涌波现象的计算结果及至解析孤立子波的结果引起物理学家与数学家们用解析求解方法寻求非线性偏微分方程式的孤立子解的兴趣. 最近二十多年来，人们对一大批从物理、力学、化学、生物等实际学科研究中出现的新的非线性偏微分方程进行研究. 例如 Korteweg-de Vries 方程，非线性 Schrödinger 方程，Захолов 方程，Landau-Lifshitz 方程、Benjamin-Ono 方程，Ginzburg-Landau 方程等. 发展了很多求解的方法. 求得孤立子波解的同时，更为有意义的是去研究方程的各种守恒规律，波的稳定传播与相互作用等的一些非线性性质. 这些研究对于相应物理运动揭示出不少非线性现象与特性.

从实际学科的应用问题研究，问题的数值模拟与计算结果的分析研究来说，需要我们对这些非线性发展偏微分方程进行数学理论的研究. 就是研究这些方程式或方程组问题提法的适定性，整体解的存在性、唯一性及正则性等的研究. 从 70 年代开始就有了关于这些方面的研究，例如对 Schrödinger 方程、Sine-Gordon 方程、KdV 方程等的研究，研究这些典型方程初值问题等整体正则解的适定性质.

从 1980 年以来，我们就开始对那些具有实际背景的非线性发展型偏微分方程的数学理论进行比较系统的深入研究. 涉及方程的类型有：非线性 Schrödinger 方程、KdV 方程、Sine-Gordon 方程、СоъолеВ-Гальперн 方程、Boussinesq 方程、伪双曲型方程、Захолов 方程、Benjamin-Ono 方程、Landau-Lifshitz 方程、Newton-Boussinesq 方程等等. 因为在实际学科问题研究中，出现的方程往往比那些最原始的典型方程内涵更丰富，形式更复杂，因此我们的研究总是正对着那些更为一般的广义的各种类型的推广方程式或方程组以及各种相互耦合的非线性发展方程组. 研究这些类型方程式或方程组各种问题的提法，如初值问题、周期初值问题、线性边界问题、非线性边界问题等的适定性，问题的解空间，解的

存在性、唯一性、正则性、稳定性，解的渐近性、衰变估计、破裂性以及长时间的性态等．取得了一些成果，在国内外学术刊物上发表了百余篇论文，出版专著四种．

限于篇幅，为了简单起见，以下将只对 Landau-Lifshitz 方程、Benjamin-Ono 方程以及 KdV 方程等的研究情况作些简要的介绍．

§2 Landau-Lifshitz 方程

在 m 维欧氏空间 $\boldsymbol{R}^m$ 的区域 Ω 中，系统的均匀 Heisenberg 链的旋密度矢量 $\vec{z}=(z_1, z_2, z_3)$ 具有 Gilbert 阻尼项的运动方程为

$$\vec{z}_t=-\alpha_1\vec{z}\times(\vec{z}\times\Delta\vec{z})+\alpha_2\vec{z}\times\Delta\vec{z}, \tag{1}$$

其中"×"是在 $\boldsymbol{R}^3$ 中的向量叉积，$\alpha_1\geqslant 0$ 为 Gilbert 阻尼常数[1]．此方程被称为 Landau-Lifshitz 方程[2]．它是非平衡磁化过程的基本运动方程．当 $\alpha_1=0$ 时，它是个可积系统．从 1974 年 K. Nakamura 与 T. Sasada 发现它的孤立子解以来，许多作者[3-6]从散射反演、规范等价性以及与非线性 Schrödinger 方程的联系等方面的研究得到一系列的结果．

方程在 $\alpha_1=0$ 时，可以写成如下的简单形式

$$\vec{z}_t=A(\vec{z})\times\Delta\vec{z}, \tag{2}$$

其中

$$\vec{z}=\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}, \quad A(\vec{z})=\alpha_2\begin{pmatrix} 0 & -z_3 & z_2 \\ z_3 & 0 & -z_1 \\ -z_2 & z_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

可以看出：矩阵 $A(\vec{z})$ 是零定的，即 $\xi A(\vec{z})\xi\equiv 0$，$\forall\,\xi, \vec{z}\in\boldsymbol{R}^3$，矩阵 $A(\vec{z})$ 是奇异的，即 $\det(A(\vec{z}))\equiv 0$，$\forall\,\vec{z}\in\boldsymbol{R}^3$．实际上矩阵 $A(\vec{z})$ 是个三阶辛矩阵．因此方程组是一个强非线性、强耦合又强退化的抛物型方程组．

另一方面，$\alpha_1 \neq 0$ 项的算子 Δ 可以转换成调和映照的 Laplace-Beltrami 算子 Δ_M. 所以 $\alpha_2 = 0$ 时，以上 Landau-Lifshitz 方程就变成调和映照的热流方程了.

可以看到 Landau-Lifshitz 方程从物理学角度与从数学角度看来，都是很具有典型的特殊性质的. 因此它的数学理论的研究是个很有意义的课题.

2. 一维问题.

在 1982 年我们研究了 Landau-Lifshitz 型方程组[7]

$$z_t = z \times z_{xx} + f(x,t,z) \tag{4}$$

的周期边值问题

$$z(x-D,t) = z(x+D,t), \tag{5}$$
$$z(x,0) = z_0(x),$$

其中 $z = (u,v,w) \in \boldsymbol{R}^3$ 为未知三维向量函数，$f(x,t,z)$ 与 $z_0(x)$ 为已知三维向量函数、$2D$ 为解的周期.

利用粘性消去法证明了周期边值问题(4)、(5)的整体弱解 $z(x,t) \in L_\infty(0,T;H^1(-D,D)) \cap W_2^{(2,1)}(Q_T)$ 的存在性，其中 $T > 0, Q_T = \{-D \leqslant x \leqslant D; 0 \leqslant t \leqslant T\}$. 首先在原始方程组(4) 中引进一个有小参数 $\varepsilon > 0$ 的扩散项

$$z_t = \varepsilon z_{xx} + z \times z_{xx} + f(x,t,z). \tag{6}$$

用此抛物型方程组 (6) 相应的问题(5) 的解 $z_\varepsilon(x,t)$ 取 $\varepsilon \to 0$ 的极限来求得原始问题(4)、(5) 的整体弱解 $z(x,t)$.

当 $D \to \infty$ 时，问题(4)、(5) 的解 $z(x,t)$ 的极限就是初始问题

$$z(x,0) = z_0(x), \quad x \in \boldsymbol{R} \tag{7}$$

的整体弱解 $z(x,t) \in L_\infty(0,T;H^1(\boldsymbol{R})) \cap W_2^{(2,1)}(Q_T^*)$，其中 $Q_T^* = \{x \in \boldsymbol{R}; 0 \leqslant t \leqslant T\}$.

所得到的整体弱解 $z(x,t)$ 是在积分的意义下满足方程组(4) 的. 因为所得到的解还在区域上是 Hölder 连续的，即 $z(x,t) \in L_\infty(0,T;H^1) \cap C^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)}$，所以周期边值条件(5) 与初值条件(7) 都是在古典的意义下满足的.

从这些结果看来，很自然会提出这样的一些问题：(1) 二阶导数项的系数矩阵退化得如此之强，边界问题应该怎样提法？(2) 整体解的正则性与唯一性会怎样？

对于方程组(4)，我们首先就考虑了三种典型的线性边界问题的提法：[8] 如第一类边界条件

$$z(0,t) = z(l,t) = 0. \tag{8}$$

第二类边界条件

$$z_x(0,t) = z_x(l,t) = 0 \tag{9}$$

与混合边界条件

$$z_x(0,t) = z(l,t) = 0 \tag{10}$$

或

$$z(0,t) = z_x(l,t) = 0. \tag{11}$$

对这些问题仍然可以采用粘性消去法的框架，得到整体弱解 $z(x,t) \in L_\infty(0,T;H^1(0,l)) \cap W_2^{(2,1)}(Q_T)$.

对于非线性边界问题，粘性消去法的框架就不太合适了，我们就采用了有限差分法与有限切片法来研究. 对于方程组(4)，我们研究了非线性边界问题[9,10]

$$z_x(0,t) = \mathrm{grad}\psi_0(t,z(0,t)), \tag{12}$$

$$-z_x(l,t) = \mathrm{grad}\psi_1(t,z(l,t)) \tag{12}$$

与混合非线性边界问题

$$z_x(0,t) = \mathrm{grad}\psi_0(t,z(0,t)),$$

$$z(l,t) = 0 \tag{13}$$

以及在半无界区域 $Q_T^+ = \{x \in \boldsymbol{R}_+; 0 \leqslant t \leqslant T\}$ 上的非线性边界问题

$$z_x(0,t) = \mathrm{grad}\psi_0(t,z(0,t)), \tag{14}$$

$$z(x,0) = z_0(x),$$

其中 $\psi_0(t,z)$ 与 $\psi_1(t,z)$ 是标量函数，算子"grad"是对 $z \in \boldsymbol{R}^3$ 的梯度算子.

同样用差分法求解了非线性边界问题

$$z_x(0,t) = \mathrm{grad}_0\psi(t,z(0,t),z(l,t)),$$
$$-z_x(l,t) = \mathrm{grad}_1\psi(t,z(0,t),z(lt)) \quad (15)$$
的整体弱解 $z(x,t)$，其中 $\psi(t,z_0,z_1)$ 为变量 $t\in \boldsymbol{R}_+, z_0, z_1 \in \boldsymbol{R}^3$ 的标量函数，而"grad_0"与"grad_1"分别是对 z_0 与 z_1 的梯度算子.

一般说来，方程组（4）的整体弱解不一定是唯一的. 在讨论整体弱解存在性时，所假定的条件不足以保证整体解的唯一性.

对于 Landau-Lifshitz 方程的柯西问题[14]
$$z_t = z \times z_{xx},$$
$$z(x,0) = z_0(x), |z_0(x)| = 1, \quad (16)$$
我们研究了光滑解的存在性与唯一性. 具有性质 $|z(x,t)|=1$ 的解通常称为饱和解，这是在物理学中主要感兴趣的情况. 我们也考虑具有 Gilbert 阻尼项的 Landau-Lifshitz 方程的相应柯西问题
$$z_t = -\varepsilon z \times (z \times z_{xx}) + z \times z_{xx} \quad (17)$$
$$z(x,0) = z_0(x), |z_0(x)| = 1.$$
我们也证明了这个问题光滑解的存在性与唯一性.

3. 多维问题.

在 1986 年我们讨论了多变量广义 Landau-Lifshitz 方程组的齐次初边值问题.[11]

设 Ω 为 m 维欧氏空间 $\boldsymbol{R}^m$ 的有界区域. 在柱形区域 $Q_T=\{x\in\Omega;\ 0\leqslant t\leqslant T\}$ 上考虑多维广义 Landau-Lifshitz 方程组的齐次初边值问题
$$z_t = z \times \Delta z + f(x,t,z), \quad (18)$$
$$z(x,t) = 0, x\in\partial\Omega, 0\leqslant t\leqslant T;$$
$$z(x,0) = \varphi(x), x\in\Omega, \quad (19)$$
其中 $\varphi(x)$ 为三维初始向量函数，$f(x,t,z)$ 为 $(x,t)\in Q_T, z\in\boldsymbol{R}^3$ 的三维已知向量函数.

对于问题(18)、(19) 前面用过的粘性消去法与有限差分法等都不好使用，我们采用了 Galërkin 逼近的方法，证明了问题(18)、(19) 至少有一个整体弱解

$$z(x,t) \in L_\infty(0,\infty;H_0^1(\Omega)) \cap C^{\left(0,\frac{1}{3+\left[\frac{m}{2}\right]}\right)}(0,T;L_2(\Omega)). \tag{20}$$

这个解在积分的意义下满足多维广义 Landau-Lifshitz 方程，也在广义的意义下满足初值条件与边界条件.

还讨论了问题的整体广义解 $z(x,t) \in W_2^{(2,1)}(Q_T)$ 在有限时间内发生“破裂”的一些充分条件等.

在 1992 年 F. Alouges 与 A. Soyear[19]对于齐次情况作了研究与得到了类似的结果，情况比较简单些，而且条件还加强了，时间却晚了六年.

4. Landau-Lifshitz 方程的几何推广.

考虑如下几何推广的 Landau-Lifschitz 方程[13,15-17]

$$z_t = *[g_1(z) \wedge g_2(z) \wedge \cdots \wedge g_{n-2}(z) \wedge \Delta z] + f(x,t,z), \tag{21}$$

其中 $z(x,t) = (z_1(x,t),\cdots,z_n(x,t))(n \geqslant 2)$ 为 m 个空间变量 $x = (x_1,\cdots,x_m) \in \boldsymbol{R}^m$ 与时间变量 $t \in \boldsymbol{R}_+$ 的未知 $n(\geqslant 2)$ 维向量函数. 这里的“$\wedge$”为外积算子，“$*$”为Hodge 算子，“$\triangle$”为 m 维欧氏空间 $\boldsymbol{R}^m$ 上的 Laplace 算子，$g_k(z)(k = 1,2,\cdots,n-2)$ 是$(n-2)$个相互线性无关的已知 n 维向量函数，$f(x,t,z)$ 为已知 n 维向量函数. 方程组可以改写成形式

$$z_t = A(z)\Delta z + f(x,t,z), \tag{22}$$

其中 $A(z)$ 为 $n \times n$ 矩阵. 此系数矩阵的秩为 2 而且是斜对称的. 当 $n \geqslant 3$ 时，系数矩阵 $A(z)$ 是零定的而且 $\det A(z) \equiv 0$. 因此方程组(21)或(22)是个强耦合、强非线性又强退化的方程组.

当 $n=2$ 时，方程组 (21) 变为

$$z_t = *[\Delta z] + f(x,t,z)$$

或

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \end{pmatrix} + f(x,t,z).$$

这却好是非线性 Schrödinger 方程复未知函数 z_1+z_2i 的分量方程组.

当 $n=3$ 时，(21) 式变为

$$z_t = *[g(z) \wedge \Delta z] + f(x,t,z)$$

或

$$z_t = g(z) \times \Delta z + f(x,t,z).$$

当 $g(z) \equiv z$,方程即为 Landau-Lifshitz 型方程.

对于一维的方程组

$$z_t = *[z \wedge g_2(z) \wedge \cdots \wedge g_{n-2}(z) \wedge z_{xx}] + f(x,t,z) \tag{23}$$

的初值条件

$$z(x,0) = \varphi(x)$$

的问题,我们得到了整体弱解

$$z(x,t) \in L^{\infty}_{1\infty}(\boldsymbol{R}_+;H'(\boldsymbol{R})) \cap C^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)}_{\text{loc}}(Q^*_\infty),$$

其中 $Q^*_\infty = \{x \in \boldsymbol{R};t \in \boldsymbol{R}_+\}$. 对一维方程组

$$z_t = *[\text{grad}G(z) \wedge g_2(z) \wedge \cdots \wedge g_{n-2}(z) \wedge z_{xx}] + f(x,t,z) \tag{24}$$

的条件 (8), (9), (10) 或 (11) 中的任一个的初边值问题，也得到了整体弱解.

对于多维情况的方程组

$$z_t = *[z \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_{n-2} \wedge \Delta z] + f(x,t,z) \tag{25}$$

的齐次初边值问题

$$\begin{aligned} &z(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, t \in \boldsymbol{R}_+, \\ &z(x,0) = \varphi(x), x \in \Omega, \end{aligned} \tag{26}$$

得到了整体弱解.

$$z(x,t) \in L^{\infty}_{\text{loc}}(\boldsymbol{R}^+,H^1_0(\Omega)) \cap C^{\left(0,\frac{1}{2+\left[\frac{n}{2}\right]}\right)}_{\text{loc}}(\boldsymbol{R}^+,L_2(\Omega)).$$

5. 在 Riemann 流形上的 Landau-Lifshitz 方程与调和映照.[12,18]

设 M 为无边 Riemann 流形．考虑如下的 Landau-Lifshitz 方程

$$z_t=-\alpha_1 z\times(z\times\Delta_M z)+\alpha_2 z\times\Delta_M z, \tag{27}$$

其中 $z: M\to S^2$，$\alpha_1>0$ 与 α_2 为常数，与 Δ_M 为 Laplace-Beltrami 算子．

调和映照 $M\to S^2$ 的热流方程为

$$z_t=\Delta_M z+|\nabla z|^2 z. \tag{28}$$

我们建立了 Landau-Lifshitz 方程与调和映照之间 的如下一些密切关系．

(1) 在古典的意义下，方程 (27) 具有初值 $|z_0(x)|=1$ 的解就是

$$z_t=\alpha_1(\Delta_M z+|\nabla z|^2 z)+\alpha_2 z\times\Delta_M z \tag{29}$$

的解．当 $\alpha_2=0$ 时，Landau-Lifshitz 方程等同于调和映照的热流方程．

在古典的意义下，调和映照 $z: M\to S^2$ 等价于(27) 且有 $\frac{\partial z}{\partial t}=0(\forall\ t\geqslant 0)$ 的解．

(2) 方程 (27) 具初值 $|z_0(x)|=1$ 的整体唯一解除有限个奇点外是正则的．

记 $V(M_\tau^T;S^2)$ 为有限能量的映照 $z: M\times[\tau,T]\to S^2$ 的集合．设 $z_1,z_2\in V(M^T;S^2)$ 为 Landau-Lifshitz 方程(29) 的解，如果 $z_1(x,0)=z_2(x,0)=z_0(x)$．则在 M^T 上 $z_1=z_2$．还证明了：在 $M\times[0,\infty)$ 上 Landau-Lifshitz 方程除有限多个点外有唯一的整体正则解．

对于 M 为紧的光滑的 m 维无边流形，我们证明了 Landau-Lifshitz 方程具有初值 $|z_0(x)|=1$ 的整体弱解的存在．

此外，我们还在紧的无边的 Riemann 流形上，考虑广义 Landau-Lifshitz 方程的初值问题

$$z_t=\Delta_M z+|\nabla z|^2 z+*[z\wedge a_2(z)\wedge\cdots\wedge a_{n-2}(z)\wedge\Delta_M z],$$

$$z(x,0) = z_0(x), \quad |z_0(x)| = 1, \tag{30}$$

其中 $a_k(z)(k = 2,\cdots,n-2)$ 为线性无关的 n 维单位向量. 证明了初值问题(30) 在 $M \times [0,\infty)$ 除有限点外唯一整体正则解的存在性与整体正则解的存在性

§ 3 深水型方程

有限深度层流体中波的传播可以用以下具有奇异积分算子的非线性微分积分方程来描写

$$u_t + 2uu_x + Gu_{xx} = 0, \tag{31}$$

其中 G 是奇异积分算子

$$Gu(x,t) = \frac{1}{2\delta}P\int_{-\infty}^{\infty}[\cosh\frac{\pi}{2\delta}(y-x) - \operatorname{sgn}(y-x)]u(y,t)dy. \tag{32}$$

在这里 δ 是个刻划流体深度的特征参数, P 表示积分主值. 这个方程是 I. Josepb 在 1977 年首先提出来的.

在浅水的情况, 即 $\delta \sim 0$ 时, 此方程可以归结为 KdV 方程

$$u_t + 2uu_x + u_{xxx} = 0.$$

对于深水的情况 $\delta \to \infty$, 以上方程变成称为 Benjamin-Ono 的深水方程

$$u_t + 2uu_x + Hu_{xx} = 0, \tag{33}$$

其中 H 为 Hilbert 积分算子

$$Hu(x,t) = \frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(y,t)}{y-x}dy. \tag{34}$$

最近十多年来, 对于深水方程 (33) 与有限深度水波方程 (31) 引起很多数学家与物理学家们的关注. 他们做出了很多有关这些方程的 Bäcklund 变换、守恒律、孤立子解以及它们相互作用的研究成果 [20—22].

从数学角度来说，这些方程是很具特殊之处的. 方程式不仅含有奇异积分算子，而且奇异积分算子还作用于方程的最高阶的微分项上. 方程还含有非线性项. 这二点同时出现在方程式里，使得对这些方程的研究带来不少麻烦. 同时也使得这些研究更具有它的特殊性与典型性了.

6. 在 1986 年我们用粘性消去法和不动点定理证明了广泛的 Benjamin-Ono 方程[23]

$$u_t + 2uu_x + Hu_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u = f(x,t) \tag{35}$$

的柯西问题

$$u(x,0) = \varphi(x), \forall\, x \in \boldsymbol{R}, \tag{36}$$

整体广义解

$$u(x,t) \in L_\infty(0,T;H^2(\boldsymbol{R})) \cap \boldsymbol{W}^1_\infty(0,\boldsymbol{T};\boldsymbol{L}_2(\boldsymbol{R}))$$

的存在性与整体光滑解

$$u(x,t) \in \bigcap_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} W^k_{\infty\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}_+;H^{m-2k}(\boldsymbol{R}))$$

的存在唯一性，其中 $m \geqslant 2$. 约比我们研究晚半年 Refael Jose Iorio Jr. 在 [25] 中用半群方法证明了 Benjamin-Ono 方程 (33) 柯西问题整体光滑解的存在性与唯一性. 他用了很长的篇幅，证明了一个简单的特殊情况.

而后我们对于更为一般的 Benjamin-Ono 型方程[24]

$$\begin{aligned} u_t &+ 2uu_x + \alpha Hu_{xx} - \beta Hu_x + r(x,t)Hu_t \\ &+ b(x,t)u_x + c(x,t)u = f(x,t) \end{aligned} \tag{37}$$

的柯西问题 (36) 也证明了整体光滑解

$$u(x,t) \in L_{\infty\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}_+,H^m(\boldsymbol{R})) \cap \boldsymbol{W}^1_{\infty\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}_+,H^{m-2}(\boldsymbol{R}))$$

的存在性与唯一性. 此外对于这些整体解，在 Q^*_∞ 上做了一系列衰减性估计.

在以上的一些研究中，主要是有赖于对具有粘性项的相应问题的解的一系列先验估计. 估计是有相当的复杂性与难度的. 奇

异积分算子项（$\alpha>0$）是个具色散效应的项，对于解的光滑化作用极弱，看来仅仅能抵消非线性项 uu_x 的产生间断性的作用，对于比 uu_x 少许强些的非线性项就难能为力了. Hu_x 的不利因素是不太好处理的. 非常有意思的是：当 $\beta>0$ 时一阶项 $-\beta Hu_x$ 是一个具有耗散效应的项，即具有正性

$$\int_{-\infty}^{\infty}(-uHu_x)dx\geqslant 0.$$

这个性质解决了不少先验估计中的困难.

对于具有耗散项的 Benjamin-Ono 型方程[25]

$$u_t-\varepsilon u_{xx}+2uu_x+\beta Hu_{xx}+\delta Hu_x=g(u)+b(x) \tag{38}$$

的柯西问题(36)，我们证明了在 H_{1r} 空间中存在整体吸引子 A，而且对它的 Hausdorff 维数 $\dim_H A$ 与分形维数 $\dim_F HA$ 作了估计. 这些维数都是有限的.

7. 在海洋与大气问题中，出现的具有有限深度的方程[26]

$$u_t=\alpha u_{xx}+\beta G(u_{xx})+\varphi(u)_x. \tag{39}$$

对于方程(39)的柯西问题(36)，我们得到了唯一的整体光滑解.

对于有限深度水波方程(31)的柯西问题(36)也证明了至少有一个整体弱解

$$u(x,t)\in L_{\infty\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}_+;H^1(\boldsymbol{R}))\cap C_{\mathrm{loc}}^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)}(Q_\infty^*).$$

对于有限深度水波方程[27]

$$u_t-G(u_{xx})-\left(\frac{u^p}{p}\right)_x=0 \tag{40}$$

的小初值问题，研究了解在 $t\to\infty$ 时的渐近行态，得到了一些解的衰减性估计. 并且证明了当 $t\to\infty$ 时问题(40)，(36)的解 $u(x,t)$ 渐近于线性方程

$$\tilde{u}_t-G(\tilde{u}_{xx})=0$$

柯西问题(36)的解 $\tilde{u}(x,t)$.

对于如下的 BO－KdV 型方程

$$u_t+\beta u_{xxx}+\delta Hu_{xx}+\gamma Hu_x+g(u)_x=0 \tag{41}$$

的柯西问题（36），当 $\beta\neq0$，$\gamma\leqslant0$ 时，存在唯一的整体光滑解 $u_{\delta\gamma}$（x，t）. 而且存在 $u_\delta(x,t)$，$u_\gamma(x,t)$ 与 $u(x,t)$ 分别为方程(41)对应于 $\gamma=0,\delta=0$ 与 $\delta=\gamma=0$ 情况的解. 有极限关系

$$\lim_{\delta\to0}u_{\delta\gamma}(x,t)=u_\gamma(x,t),$$
$$\lim_{\gamma\to0}u_{\delta\gamma}(x,t)=u_\delta(x,t),$$
$$\lim_{\delta,\gamma\to0}u_{\delta\gamma}(x,t)=u(x,t).$$

此外我们还对二维 Benjamin-Ono 方程的耦合方程的柯西问题

$$\begin{aligned}&u_t+\alpha u_{xxx}+\beta Hu_{xx}+\varepsilon v_y+u^p u_x=0,\\&u_y=v_x,\\&u(x,y,0)=\varphi(x,y)\end{aligned}\tag{42}$$

得到了唯一的整体光滑解.

§4 KdV 型方程

8. 关于 Korteweg-de Vries 方程问题，国外已有很多研究工作[28-32]. 我们近年来主要是对于一般的广义 KdV 型方程组作了一系列数学理论方面的研究，例如有最佳非线性增长阶的处理、粘性方程、整体广义解、整体光滑解的性质以及相应的一些高阶 *KdV* 型方程组的广义解与光滑解.

考虑如下的广义 KdV 型方程组[33-35]

$$u_t+(\mathrm{grad}\varphi(u))_x+u_{xxx}=f(x,t,u),\tag{43}$$

其中 $u=(u_1,\cdots,u_m)$ 为未知 m 维向量函数，$\varphi(u)$ 为 $u\in\boldsymbol{R}^m$ 的标量函数，$f=(f_1,\cdots,f_m)$ 为 m 维已知向量函数. 在区域 $Q_T=\{-D\leqslant x\leqslant D;0\leqslant t\leqslant T\}$ 上考虑方程组(43)的周期边值问题

$$\begin{aligned}&u(x-D,t)=u(x+D,t),x\in\boldsymbol{R},0\leqslant t\leqslant T;\\&u(x,0)=u_0(x),\qquad x\in\boldsymbol{R}.\end{aligned}\tag{44}$$

同时，我们也考虑方程组(43)的柯西问题

$$u(x,0)=u_0(x) \tag{45}$$

首先，我们研究具有小参数扩散项的 KdV 型方程组

$$u_t+\varepsilon u_{xxxx}+(\operatorname{grad}\varphi(u))_x+u_{xxx}=f(x,t,u) \tag{46}$$

的周期边值问题(44)与初值问题(45)的整体解.

利用不动点原理，泛函空间范数之间的内插公式以及先验估计的方法，证明了带小参数扩散项的 KdV 型方程组 (46) 的周期边值问题 (44) 具有唯一的整体广义解 u_ε (x, t) 与整体光滑解 $u_\varepsilon(x, t)$ 的存在. 在这里，对已知标量函数与已知向量函数对 $u\in \boldsymbol{R}^m$ 有如下增长阶数的限制：

$$|\varphi(u)|\leqslant C|u|^{6-\delta},\delta>0;$$

$$|f(x,t,u)|\leqslant C(1+|u|^3).$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时，问题 (46)，(44) 解 $u_\varepsilon(x,t)$ 的极限，即为问题 (43)，(44) 的整体解 $u(x,t)$. 由此我们就得到广义 KdV 型方程组 (43) 的周期边值问题(44) 的整体广义解与整体光滑解. 同时也可以得到这些解的唯一性. 当 $\varepsilon\to 0$ 时，问题(46)，(44) 的解 $u_\varepsilon(x,t)$ 收敛于问题(43)，(44) 的解的速率有如下的估计

$$\| u_\varepsilon(\cdot,t)-u(\cdot,t)\|_{L_\infty(-D,D)}=0(\varepsilon^{\frac{7}{8}}),$$

$$\| u_{\varepsilon x}(\cdot,t)-u_x(\cdot,t)\|_{L_\infty(-D,D)}=0(\varepsilon^{\frac{5}{8}}),$$

$$\| u_{\varepsilon xx}(\cdot,t)-u_{xx}(\cdot,t)\|_{L_\infty(-D,D)}=0(\varepsilon^{\frac{3}{8}}),$$

$$\| u_{\varepsilon xxx}(\cdot,t)-u_{xxx}(\cdot,t)\|_{L_\infty(-D,D)}=0(\varepsilon^{\frac{1}{8}}).$$

令 $D\to\infty$，我们就可以得到广义 KdV 型方程组 (43) 初值问题 (45) 的整体广义解与整体光滑解的存在性.

9. 对于如下的高阶 KdV 型方程组[34,35]

$$u_t+(\operatorname{grad}\varphi(u))_x+ux^{2p+1}=f(x,t,u) \tag{47}$$

的柯西问题 (45)($p\geqslant 1$)，我们得到了类似的结果.

对于具有高阶导数的非线性项的高阶 KdV 型方程组的柯西问题[36]

$$u_t + ux^{2p+1} + G(u, u_x, \cdots, u_{xp})_x$$
$$= A(x,t)u + g(x,t),$$
$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \boldsymbol{R}, \tag{48}$$

我们得到了整体弱解，研究了初值问题(48)，(48)解在有限时间内的破裂性质.

对于如下非线性五阶 KdV 型方程[38]

$$u_t + F_u(u)_x + G_u(u, u_x)_x + G_{ux}(u, u_x)_{xx} + u_{xxxxx} = 0 \tag{49}$$

研究了初值问题整体光滑解的存在性，其中

$$G(u, p) = aup^2 + bu^2p^2 + cu^3p^2 + dp^3. \tag{50}$$

对于多变量的高阶 KdV 型方程组[39]

$$u_t + \delta\delta_{2p}u + \delta(\mathrm{grad}\varphi(u)) = A(x,t)u + g(x,t) \tag{51}$$

证明了柯西问题整体广义解的存在性，其中 $u = (u_1, \cdots, u_m)$ 为 m 维未知向量函数，$A(x,t)$ 为 $m \times m$ 矩阵，$g(x,t)$ 为 m 维向量函数，而且 $\delta_k = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k$ 算子.

对于耦合 KdV 方程与非线性 Schrödinger 方程的方程组[39]

$$i\varepsilon_t + \alpha\varepsilon_{xx} - \beta n\varepsilon = 0,$$
$$n_t + \frac{1}{2}f(n)_x + \frac{r}{2}n_{xxx} + \frac{1}{2}|\varepsilon|_x^2 = 0 \tag{52}$$

的柯西问题，证明了整体解的存在性与唯一性，其中 $\varepsilon = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_m)$ 为 m 维复向量函数而 n 为实值函数. 对于耦合 KdV 方程与非线性波动方程的方程组[40]

$$u_t = u_{xxx} + 6uu_x + 2vv_x,$$
$$v_t = 2(uv)_x \tag{53}$$

的柯西问题也得到了唯一的整体光滑解.

参考文献

[1] M. Lahshmanan and K. Nakamura, Landau-Lifshitz equation of ferromagnetism: Exacttreatment of the Gilbert Damping, Phys. Rev. Lett., 53 (26), 1984, 2497—2499.

[2] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, On the theory of the dispersion of magnetic permeability in ferromagnetic bodies, Phys. Z. Sowej., 8, 1935, 153 (collected Papers of L. D. Landau, Pergaman, New York, 1965, pp. 101—114).

[3] H. C. Fogedby, Theoretical aspects of mainly low dimensional magnetic systems, Lecture Notes in Physics, 131, Springer-Verlag, Berlin, Heideberg, 1980.

[4] K. Nakamura and T. Sasada, Soliton and wave trans in ferromagnets, Phys. Lett., 48 (A), 1974, 321—322.

[5] L. A. Takhtalian, Integration of the continuous Heisenberg spin chain through the invers scattering method, Phys. Lett. 64A, 1977, 235.

[6] J. Tjon and J. Wright, Soliton in the continuous Heisenberg chain, J. Phys. Rev., 15B, 1977, 3470—3476.

[7] Zhou Yulin and Guo Boling, On the solvability of the initial value, problem for the quasilinear degenerate parabolic system $\vec{z}_t = \vec{z} \times \vec{z}_{xx} + f(x,t,\vec{z})$, Proc. of DD-3 Symposium, 1982, 713—732.

[8] 周毓麟，郭柏灵，铁磁链组边界问题的弱解的存在性，中国科学（A 辑），1984，107—117.

[9] Zhou Yulin and Guo Boling，Some boundary problem of the spin systems and the systems of ferromagnetic chain，(I) Nonlinear boundary problem，Acta Math. Scientia，6，1986，321—337.

[10] Zhou Yulin and Guo Boling，Some boundary problem of the spin systems and the systems of ferromagnetic chain，(Ⅱ) Mixed problems and others，Acta Math. Scientia，7，1987，121—132.

[11] 周毓麟，郭柏灵，多变量铁磁链组齐次边界问题的弱解，中国科学（A 辑），1986，337—349.

[12] Guo Boling and Hong Minchun，The Landau-Lifshitz equation of the ferromagnetic spin chain and harmonic maps，Calculus of Variations and PDE，1993，311—334.

[13] Zhou Yulin，Sun Hesheng and Guo Boling，Geometrical extensions for systems of ferromagnetic chain，Advances in Math.，China，21 (4)，1992，497—501.

[14] 周毓麟，郭柏灵，谭绍滨，铁磁链组光滑解的存在性与唯一性，中国科学（A 辑），1990，247—259.

[15] 周毓麟，孙和生，郭柏灵，铁磁链型方程组的 Cauchy 问题，中国科学（A 辑），23 (1993)，352—362.

[16] 周毓麟，孙和生，郭柏灵，多维铁磁链型方程组，中国科学（A 辑），23 (1993)，1015—1024.

[17] Zhou Yulin，Sun Hesheng and Guo Boling，Boundary value problems for a system of ferromagnetic chain type，Proc. of Internatlonal Conference，Zhejiang Univ. 1992，International Academic Publishers.

[18] Guo Boling and Wang Youde, Generalized Landau-Lifshitz sysrems of ferromagnetic chain type and harmonic maps, Proc. of 1994 Beijing International Conference on Nonlinear Evolutions Equations and Iufinite Dimensional Dynamical Systems, Univ. Sunyatseni Press, Preprint, 1994, IAPCM, #94—03.

[19] F. Alouges and A. Soyear, On global weak solution for Landau-Lifshitz equations, Nonlinear Analysis TMA, 13 (11), 1992.

[20] J. 'Satsuma and D. J. Kaup, A Bäcklund transformation for a higher order Korteweg-de Vries equation, J. Phys. Soe. Japan, 43, 1977, 692—697.

[21] J. Satsuma and R. Hirota, A coupled KdV equation in one case of four-reduction of the KPHierarchy, J. Phys. Soe. Japan, 51, 1982, 3390—3397.

[22] R. Hirota and Ito, Resonance of solitons in one dimension, J. Phys. Soe. Japan, 52, 1983, 744—748.

[23] Zhou Yu-lin and Guo Boling, Initial value problems for a nonlinear singular integral-differential equation of deep water, Proe. DD-7 Symposium, Tianjin, 1986, Lecture Notes in Math., 1306, 278—290.

[24] Zhou Yulin and Guo Boling, Global solutions and their large time behavior of Cauchy problem for equations of Benjamin-Ono type, to appear in J. PDE, China, 1995.

[25] Rafael Jose Iorio, Jr., On the Cauchy problem for the Benjamin-Ono equation, Comm. in PDE, 11, 1986, 1031—1084.

[26] Zhou Yulin, Guo Boling and Tan Shaobin, Long time behavior for the equation of finite-depth fluids, Comm. Math. phys. 163, 1, 1994, 1—15.

[27] Guo Boling and Tan Shaobin, Cauchy problem for a generalize nonlinear dispersion equation, J. PDE, China, 5 (4), 1992, 37—50.

[28] E. Ott and R. N. Sudan, Phys. Fluid, 12, 1969, 2388-2394.

[29] A. Sjoberg, On the Korteweg-deVries equation: Existence and uniqueness, J. Math. Anal. Appl., 29, 1970, 569—579.

[30] J. L. Bona and R. smith, The initial-value problem for the Korteweg-deVries equation, Phil. Trans. Roy. Soe. London, 278 (A), 1975, 555—601.

[31] J. C. Saut, Sur queleques generalisations de equation de Korteweg-deVries, J. Math. Pure Appl., 58, 1979, 21—61.

[32] Charies F. F. Karney, Abhijit Sen and Flora Y. F. Chu, Nonlinear evolution of lower hybrid wave, Phys. Fluid, 22 (5), 1979, 940—956.

[33] 郭柏灵，一类更广泛的 KdV 方程的整体解，数学学报，25 (6)，1982，641-656.

[34] Zhou Yulin and Guo Boling, On the system of the generalize Korteweg-de Vries equations, Proe. of DD-3 Symposium, 1982, 739—758.

[35] 周毓麟，郭柏灵，高阶广义 Korteweg-de Vries 型方程组的周期边界问题与初值问题，数学学报，27 (2)，1984，154—176.

[36] Zhou Yulin and Guo Boling, A class of general systems of Korteweg-de Vries type I: Weak solution with derivative $u_x p$, Acta Math. Appl. Sinica, 2, 1984, 153—162.
[37] 周毓麟，郭柏灵，高阶多变量 Korteweg-deVries 型方程组整体弱解的存在性，中国科学（A 辑），1985，1083-1095.
[38] Guo Boling, Han Yongqian and Zhou Yulin, On smooth solution for a nonlinear 5 th order equation of KdV type, 待发表.
[39] 郭柏灵，一类 KdV 与非线性 Schrödinger 方程的耦合组的 Cauchy 问题整体解的存在性与唯一性，数学学报，26 (5)，1983，513—532.
[40] Guo Boling and Tan Shaobin, Global smooth solution for a coupled nonlinear wave equations, Math. Meth. Appl. Sci., 14 (6), 1991, 419—425.

杨-米尔斯场、调和映照和孤立子的几何理论

胡和生
（复旦大学）

一　引　言

本世纪开始以来，微分几何和物理学发生了密切的联系. Einstein 的广义相对论把引力理论和弯曲时空联系起来，促进了物理学和微分几何的重大发展. 杨-米尔斯理论是物理学四种相互作用的理论基础，70 年代，它又和纤维丛的联络论相互沟通，形成了几何和物理学结合的新篇章、新高潮. 此外物理学中提出的场论的手征模型，就是微分几何中的调和映照. 60 年代，在许多科学领域中起重大作用的孤立子理论兴起，并得到蓬勃的发展，它和微分几何也有密切联系. 例如，求解孤立子方程的 Bäcklund 变换，就发源于微分几何. 这些事件都有力地促进了几何和物理的结合，说明微分几何和物理学的相互融合.

杨-米尔斯场、调和映照和孤立子的几何理论三者之间的关系也非常密切，前二者同为变分理论，是非线性理论. 特别，R^4 上的杨-米尔斯理论和 R^2 的调和映照同为共形不变的理论，在数学方法中有不少相通之处. 在杨-米尔斯理论中引进质量的一种方法就是将杨-米尔斯场和调和映照偶合起来. R^2 上的调和映照实际上是自对偶杨-米尔斯场的某种约化. 孤立子理论的重要基础是孤立子的 Lax 表示，它形成了一套可积系统的理论. 孤立子方程的

Lax 对的可积条件恰是杨-米尔斯理论中的零曲率条件. 自对偶的杨-米尔斯场和 R^2(或 R^{1+1})的调和映照都是容有 Lax 对的可积系统、所以三者之间存在着非常重要的多通道的联系.

70 年代中，复旦大学和杨振宁教授合作研究规范场. 80 年又开始了调和映照的研究. 到 86 年天元基金建立了“整体微分几何及其物理应用”项目，研究范围得到进一步扩展，本文将就这些研究所获得的成果进行一些综述. 但限于篇幅，我们未能把国内其它有关成果包含在这个综述之中. 天元基金项目中有关微分几何的其它方面的许多成果也未能包括在内.

二 杨-米尔斯场

非 Abel 规范场是杨振宁和 Mills 在 1954 年提出来的. 设 G 为一紧致李群，g 为其李代数，x^λ $(\lambda=1,2,3,4)$ 为时空坐标，b_λ 为取值于 g 的函数，称为规范势，

$$f_{\lambda\mu}=\frac{\partial b_\mu}{\partial x^\lambda}-\frac{\partial b_\lambda}{\partial x^\mu}+[b_\lambda,b_\mu] \tag{1}$$

称为场强. Yang-Mills 作用量为

$$S(b)=\frac{1}{4}\int(f_{\lambda\mu},f^{\lambda\mu})d^4x.$$

这里(,) 是 Cartan 内积. 这个变分问题的 Euler-Lagrange 方程

$$\eta^{\lambda\mu}\left(\frac{\partial f_{\sigma\mu}}{\partial x^\lambda}+[b_\lambda,f_{\sigma\mu}]\right)=0 \tag{2}$$

称为 Yang-Mills 方程(Y-M 方程)，这里 $\eta^{\lambda\mu}$ 是时空度量. 从 1972年开始，杨振宁教授多次在国内讲述规范场理论及其发展. 1974 年，在他的建议下，复旦大学成立了一个以谷超豪为组长的研究小组，和他进行了共同的研究，小组成员也分别进行了各自的研究，这种合作和交流进行了近十年，被杨振宁称为卓有成效的合作.

在这项合作研究中，从 1974 年到 1980 年，在“中国科学”上共

同发表了五篇论文,有多方面的成果,其中包括:

1. 在国际上首次论证了弯曲的 Lorentz 流形上有源与无源的 Yang-Mills 方程的 Cauchy 问题的局部经典解的存在性,比 I. Segal 在平坦空间中无源 Y-M 方程的 1979 年相应结果早了五年.

2. 提出并研究了规范势在什么程度上决定规范场的问题. 证明了场强及其到某一阶为止的规范导数可以决定规范场本身. 在 $SU(3)$ 情形,证明场强及其一阶规范导数可决定规范场本身,结果相当完整,被选入杨振宁的论文选集中,引起了若干后续工作.

3. 用黎曼流形来解释瞬子解,并对引力瞬子做出了分类.

在合作研究的同时以及其后,各参加成员也另外发表了许多论文,下面是部分成果.

谷超豪和胡和生完整地严格地决定了球对称的规范场的一切形式.

谷超豪发展了杨振宁所提出的规范场相位因子方法,他论证了如何用闭环路位相因子(和乐映照) 来刻划规范场,证明了纤维丛的拓扑结构也包含在和乐映照之中. 这个方法在物理界得到许多引用与应用.

谷超豪又把 t' Hooft 用 $SU(2)$ 规范场构作磁单极的方法扩充成一般的关于对称破缺和对偶荷的理论.

上述的许多成果,除分别在国内外杂志上发表外,谷超豪总结成一篇综合性文章,在西欧著名刊物 Physics Report 上以一期专刊发表.

关于 Y-M 方程解的存在性和不存在性,胡和生有一系列成果.

在整个时空 $R^{(n-1)+1}$ 上,胡和生证明:$n \neq 5$ 时,当能量有限或慢发散时,Y-M 方程不存在无奇性的静态解. 这个结果改善了 S. Deser 的著名结果,即减弱了能量条件,取消了无限远时的条件.

Y-M 方程(2) 所对应的基本粒子是无质量的. 但是,自然界中的基本粒子中有许多是有质量的. 物理学家往往用 Higgs 来引入

质量. 胡和生将 Y-M 作用量和调和映照作用量相偶合来引进质量. 她证明了：$n \neq 4$ 时有质量规范场在能量有限或慢发散时，不存在无奇性的静态解. 由于 5 维时空中确实存在质量 $m = 0$ 的有限能量解，因而，$m > 0$ 和 $m = 0$ 有很大区别. 这就发现了 $m \to 0$ 时的不连续性. Deser 等人的论文中称胡和生给出了经典场论不连续性的第一个显式例子. 他们的后续论文中，在作用量中再添加 Higgs 场，证明了也有类似的结果. 我们在这里还指出：$n \neq 4$ 时，有质量规范场是否存在无奇性的静态解尚是未解决的问题.

胡和生研究 Y-M 方程(2)的团块现象，在能量无限，但发散较缓慢时，证明了 Y-M 场不存在团块现象. 而 Coleman 等人的结果只是在能量有限时得出的，她又以实例说明如果取消能量条件，团块解确实存在.

胡和生还证明了 Schwarzschild 黑洞外面($r > 3M$)在一定边界条件下，Y-M 方程不存在能量有限或慢发散的静态解. 但 $r > 2M$($r = 2M$ 是黑洞半径)时，这个事实是否成立，还是未解决的问题.

最近，丘成桐等人将 Y-M 场和 Einstein 场相偶合得出：Yang-Mills-Einstein 方程当能量有限，存在无奇性的静态解. 后继工作者给出了一些例子. 这是一项重要的结果.

沈纯理和陈韵梅合作研究 Y-M 流，即对 Y-M 方程(2)添上$\frac{\partial b}{\partial t}$项，成为和抛物型方程相类似的方程组. 他们得到了小范围时间解的存在性，建立了单调性公式及局部正则性，并利用它讨论了 Y-M 流演化过程中的正则性及奇点集的性质. 又当 $n = 4$ 时，在整体解存在的假定下，他们刻划了解的具体渐进形态.

三　调和映照

调和映照是由 Eells 和 Sampson 在 60 年代初开始研究的. 设

M 与 N 是黎曼流形，$\varphi: M \to N$ 是 C^2（或 L_1^2）映照，映照 Φ 的能量积分由

$$S(\Phi) = \int |d\varphi|^2 dV_M$$

所定义. 这个变分的临界点，即其 Euler-Lagrange 方程的解称为调和映照. M 称为出发流形，N 称为靶流形. 在局部坐标下，调和映照所满足的方程为：

$$g^{ij}\left(\frac{\partial^2 \varphi^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} - \underset{M}{\Gamma_{ij}^k} \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^k} + \underset{N_j}{\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha} \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial \varphi^i} \frac{\partial \varphi^\gamma}{\partial x^j}\right) = 0,$$

这里 $\underset{M}{\Gamma_{ij}^k}$ 和 $\underset{N}{\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha}$ 分别是 M 和 N 的克氏记号.

在物理学中，Gellman 引进一种非线性场论模型，称为非线性 σ-模型或手征场，从数学上来说，实际上是时空到 3 维球面 S^3 的调和映照. 后人将 S^3 扩充为齐性空间. 特别是当靶流形为李群时，则称为主手征场.

谷超豪提出以 Minkowski 空间为出发流形的调和映照（现又称为波映照）的 Cauchy 问题，在国际上最早证明了从 Minkowski 平面 R^{1+1} 到任何完备黎曼流形 Cauchy 问题的整体解的存在性. 由此，他得出的一个物理推论是：R^{1+1} 上的非线性 σ 模型不会产生奇性. 后来，Shatah 举例说明 $R^{n+1}(n \geqslant 3)$ 到 S^3 的波映照的 Cauchy 问题有时会在有限时间内出现奇性. 但 $n=2$ 时情况如何，现在尚不清楚.

谷超豪又首先研究了 R^{1+1} 到 Lorentz 流形的调和映照的存在性问题. 在目标流形为 S^{1+1}（Minkowski 空间 R^{2+1} 中的类空球面）时，他分析了各种可能的初始条件，举出了大范围解存在的情况，给出了整体解存在和不存在的判据.

谷超豪，胡和生合作，将 $R^{1,1}$ 和 R^2 到 $U(N)$ 的调和映照用孤立子理论中的方法显式作出（见(四)）.

$M \to N$ 的调和映照的第二变分为非负时，称为稳定调和映照. 1980 年，忻元龙得出：$n \geqslant 3$ 时，不存在欧氏球面到任何黎曼流形的稳定调和映照. 引起了人们的注意和后续工作. 例如，潘

养廉证明了紧致单连通 $\delta(n)$-pinched 流形 M^n 到任何黎曼流形的稳定调和映照的不存在性.

1982 年，R. Schoen 和 K. Uhlenbeck 在一般情况下得出了调和映照的部分正则性定理. 当目标流形为不可约齐性黎曼流形时，忻元龙改进了上述定理，导出了正则性条件.

关于球同伦群 $\pi_m(S^m)$，R. T. Smith (1979) 曾证明：在 $m\leqslant 7$ 时，$\pi_m(S^m)$ 的每一类中都有调和代表元. 当 $m\geqslant 8$ 时，长期以来没有结果. 1991 年，忻元龙构造了一种等变调和映照，并证明了 $\pi_{2m+1}(S^{2m+1})$ 中任一奇数类必存在调和代表元. 其它情况，还是未解决的问题. 此外，忻元龙还利用等变变分技巧，证明了高维圆盘到高维球面的轴对称调和映照的大范围边值问题的存在性.

有关调和映照的刚性，当出发流形是非负 Ricci 曲率的流形时，国外几何学家已有很好的工作. 但对于非正曲率的流形知之甚少. 忻元龙得到了从第四类典型域到任一黎曼流形的调和映照的刚性定理. 证明中要用到丁青所导出的一种新的 Laplace 比较定理. 丁青用自己的比较定理还证明了：Cartan-Hadmand 流形在 Ricci 曲率 pinching 条件下，调和函数的无穷远 Dirichlet 边值问题的可解性.

沈纯理和周青利用调和映照方法得到完备非紧流形基本群的性质，推广了 Gromoll-Wolf，Lawson-丘成桐关于紧流形基本群的结果.

沈一兵给出了曲面到复射影空间形式的迷向调和映照的高阶曲率不变量的完全系，推广了陈省身-Wolfson 的有关工作，刻划了复射影空间中调和序列为 Veronese 序列的新特征.

沈一兵还和东瑜昕合作，得出 S^4 中曲面的 twistor Gauss 映照为调和映照的充要条件. 并且找到 CP^3 中非迷向的调和映照的许多实例.

东瑜昕对 Eells-Wood 在 1982 年提出的关于紧黎曼面 M 到

复射影空间调和映照迷向性问题，给出了判定迷向性的充分条件：$|\deg\varphi|>2(n-1)(g-1)$，其中，$g$ 为 M 的亏格．$\deg\varphi$ 表示映照的拓扑度．因而，拓扑度较大的调和映照一定是迷向的．

胡和生（1982）系统研究了 R^2，R^{1+1} 到空间 S^2，H^2，S^{1+1} 等的调和映照，导出了这些调和映照和若干典型的非线性偏微分方程的关系．综合的结果是：

调和映照	偏微分方程
$R^2 \to S^2$	$\Delta\alpha=-\sinh\alpha$
$R^2 \to H^2$	$\Delta\alpha=\sinh\alpha$
$R^2 \to S^{1+1}$ （+1）	$\Delta\alpha=-\sin\alpha$
$R^2 \to S^{1+1}$ （−1）	$\Delta\alpha=\sin\alpha$
$R^{1+1} \to S^2$	$\alpha_{tt}-\alpha_{xx}=\sin\alpha$
$R^{1+1} \to S^{1+1}$ （+1）	$\alpha_{tt}-\alpha_{xx}=\pm\sinh\alpha$
	或 $\alpha_{tt}-\alpha_{xx}=\cosh\alpha$
$R^{1+1} \to H^2$	$\alpha_{tt}-\alpha_{xx}=\sin\alpha$

其中，$R^{1+1}\to S^2$ 的调和映照和 sine-Gordon 方程的联系是 K. Pohlmeyer1976 年指出的．

Eells 曾提出是否存在 $R^2\to H^2$ 的调和映照？胡和生具体做出 R^2 的半平面到 H^2 的调和映照．林峻岷得出：$R^2\to H^2$ 的规范调和映照只可能为点或测地线．Treibergs 等证明了确实存在 $R^2\to H^2$ 的非平凡调和映照．

四　孤立子的几何理论

孤立子理论反映了一大类的自然现象，它们是由非线性偏微分方程来刻划的，这种理论特别注意求显式解的问题．它往往是把一个非线性偏微分方程作为另外一组线性方程（称为 Lax 对）的可积条件．例如：sine-Gordon 方程

$$\alpha_{xt}=\sin\alpha$$

的 Lax 对是：

$$\Phi_x=\begin{bmatrix}\lambda & -\frac{\alpha_x}{2}\\ \frac{\alpha_x}{2} & -\lambda\end{bmatrix}\Phi,\quad \Phi_t=\begin{bmatrix}\frac{1}{4\lambda}\cos\alpha & \frac{1}{4\lambda}\sin\alpha\\ \frac{1}{4\lambda}\sin\alpha & -\frac{1}{4\lambda}\cos\alpha\end{bmatrix}\Phi$$

sine-Gordon 方程与负常曲率空间的联系是早就知道的. 陈省身建立了 Minkowski 空间中类时正常曲率曲面和 sinh-Gordan 方程

$$\alpha_{xt}=\sinh\alpha$$

的联系. 为了研究其它类型的常曲率曲面，胡和生引入了渐近线为虚的常曲率曲面的 Tshebyscheff 坐标这一概念，并把各类常曲率曲面和（三）中提到的那些非线性偏微分方程联系起来，结果综合如下表所示：

曲面	曲率	Tch. 坐标下的 ds^2
$S\subset R^{2+1}$	-1	$\mathrm{ch}^2\frac{\alpha}{2}dt^2+\mathrm{sh}^2\frac{\alpha}{2}dx^2$
$S\subset R^3$	$+1$	$\mathrm{ch}^2\frac{\alpha}{2}dt^2+\mathrm{sh}^2\frac{\alpha}{2}dx^2$
$S\subset R^{2+1}$	-1	$\cos^2\frac{\alpha}{2}dt^2-\sin^2\frac{\alpha}{2}dx^2$

Tch. 坐标下第二基本型	相应方程
$\mathrm{ch}\frac{\alpha}{2}\mathrm{sh}\frac{\alpha}{2}(dt^2+dx^2)$	$\Delta\alpha=\mathrm{sh}\alpha$
$\mathrm{ch}\frac{\alpha}{2}\mathrm{sh}\frac{\alpha}{2}(dt^2+dx^2)$	$\Delta\alpha=-\mathrm{sh}\alpha$
$\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}(dt^2+dx^2)$	$\Delta\alpha=\sin\alpha$

据此，可以利用孤立子理论中求解相关方程的技巧来构造出各种类型的常曲率曲面. 由于正常曲率曲面和平均曲率等于常数的曲

面构成平行曲面，因而这套技巧也可以用来构造平均曲率等于常数的曲面.

Darboux 变换发源于 1883 年 Darboux 的工作，至本世纪 70 年代末被发掘出来，又得到很大发展，使能为许多孤立子方程提供显式解. 其实质是利用 Lax 对的基本解把求解过程化为代数过程. 在微分几何中 Lax 对的基本解往往正好是需要求出的几何对象，因而，Darboux 变换非常有利于微分几何的研究. 同时，我们在研究过程中也发展了 Darboux 变换理论.

胡和生研究了 3 维射影空间中一类重要的周期 4 的 Laplace 序列. 多年以前曾被 Finikov 和苏步青研究过，文献中称为 Finikov 构图或苏链，其制作联系于 sinh-Gordon 方程的求解，但缺少显式解的实例. 胡和生利用 Darboux 变换作出了一系列的显式解. 证明了和一个苏链相衔接的新苏链的存在性. 从而可以得出无穷个苏链. 她又证明了，以 $2n$ （$n\geqslant 2$）为周期的苏链的存在性.

谷超豪，胡和生把 Darboux 变换用于 R^{1+1}到 $U(N)$ 的调和映照，得到从一已知调和映照构造出新调和映照的代数方法，给出了前人所未能求出的解的显式公式. 从而，可以显式地做出 R^{1+1} 到 $U(N)$ 单孤子及多孤立子的调和映照，并且证明了孤立子的相互作用具有弹性散射的性质. 对于 R^2 到 $U(N)$ 的调和映照，也可以作同样的应用，得到 k 孤立子解（$k=1, 2, \cdots$）. R^2 到 SU （2）的调和映照，也就是 R^2 到 S^3 的调和映照，k 孤立子解的几何意义是：在 R^2 上有 k 根特殊直线，它们到 S^3 的映照的像不是趋向赤道的螺旋线，而其它直线的像都是螺旋地趋向于赤道. 谷超豪，胡和生并得到了关于奇异 Darboux 变换的一个显式公式.

谷超豪，胡和生用高维时空 R^{n+1} 中推广的 AKNS 系统的 Darboux 变换来研究由 Beals 与 Tenenblat 所提出的高维空间中的广义内在波动方程和广义内在 sine-Gordan 方程，这些方程是联系于 n 维的常曲率线素而制作的. 谷超豪，胡和生得出了这两种方

程组的显式解的一般公式，而原来的工作只是得出 Bäcklund 变换的微分方程.

五 结束语

几何和物理的交叉和渗透是近年来国际上的一个大趋势. 许多数学大家都投入这方面的工作，得出十分重要的成果. 例如：Y-M 方程的整体解的存在性，正质量猜测的证明，弦理论的发展，Chern-Simons 不变量的应用等等，都是十分重要的进展. 最近，E. Witten 等又发展了一项线性理论，可以用它来计算 Donaldson 关于 4 维流形的微分拓扑不变量，得出深入的成果. 所有这些都是应该大力跟踪和学习的. 与此同时，也应该努力做出有我们自己特点的研究工作.

经典调和分析在中国的发展概况

程民德　　邓东皋　　龙瑞麟
（北京大学）（中山大学）（中国科学院）

一　历史回顾

自从 Fourier 于 1807 年运用函数的三角级数展开求解热传导方程开始，Fourier 分析便显示着广阔的应用前景. 以后，Riemann 在 1853 年提出了黎曼积分概念，并给出了黎曼积分意义下 Fourier 级数的收敛准则；Cantor 在 1872 年研究了三角级数的唯一性，从而推动了他对集合论的系统研究；1902 年 Lebesgue 积分问世，这极大地推动了 Fourier 分析的发展. 所有这些不仅使 Fourier 分析理论上更趋成熟，同时也揭示了 Fourier 分析在数学发展中所起的作用，自 1913 年 Luin 作出 L^2 中函数 Fourier 级数几乎处处收敛的著名猜测，以及 1926 年 Kolmogorov 在 L^1 空间中构造出反例以来，Fourier 级数的收敛与求和成了本世纪上半叶的研究主流，这个潮流一直延续到 1966 年 Carleson 对 Luin 猜测作出肯定回答. 本世纪 50 年代以来，Zygmund，Calderon，Stein，Fefferman，Hörmander 等将调和分析的研究推进到一个崭新的阶段，并使（高维）调和分析与微局部分析成为研究现代微分方程的重要工具之一. 至此，调和分析已成了现代数学中一个既具理论意义又有广阔应用前景的学科分支.

陈建功是国内开展调和分析研究的先驱. 1928 年他便在日本

东京帝国研究院汇刊上发表了关于三角级数绝对收敛的充分必要条件的著名文章. 30年代中期武昌高师的高才生王福春也在日本东北帝国大学研究三角级数. 陈建功回国以后培养了许多调和分析方向的研究生，程民德是其中最早的. 1949年以后，陈建功先后在浙江大学、复旦大学、杭州大学继续培养了调和分析方向的更多的研究生，其中有龚昇、郭竹瑞、王斯雷、谢庭藩、施咸亮、李训经、陈天平等. 程民德1947年赴美国普林斯顿大学深造，师从著名调和分析学家Bochner. 1950年回国以后，程民德在北京大学建立了调和分析研究领域，培养了陈永和、邓东皋、龙瑞麟、韩永生、彭立中等. 在国内开展调和分析研究的还有北京师范大学，如孙永生、陆善镇、王昆阳等；南京大学有郑维行、苏维宜等；武汉大学有余家荣、文志英等等.

调和分析还有一个庞大的重要的内容是群上的调和分析. 华罗庚是国内开展这方面研究的奠基人. 华罗庚及其学生陆启铿、龚昇等人开展了从典型域到紧李群上调和分析的深入研究，并获得了突出的成果. 这方面在多复变函数论的介绍中会涉及. 本文将只对60年来我国学者在经典调和分析方面取得的主要成绩作一概括介绍.

二 三角级数经典理论

陈建功（日本东京帝国研究院汇刊，V. 4，1928）给出了三角级数绝对收敛的充分必要条件. 几乎同时，Hardy-Littlewood (Math. Zeit.，1928)得到了同样的结果，并被今人以Hardy-Littlewood命名，其实应称之为陈-哈代-李特伍德定理. 陈建功发表的日文专著“三角级数论”（岩波书店，1930，东京）是三角级数理论最早的专著之一.

王福春（J. London Math. Soc.，V. 19，1944）关于强性求

和的结果是这方面的代表作之一.

三角级数的唯一性.是三角级数理论中一个比较困难的课题，它不同于 Fourier 级数的唯一性. 两个 Fourier 级数如果都收敛于同一个函数 $f(x)$，则它们必恒等，即都是 $f(x)$ 的 Fourier 级数. 对于一般的三角级数来说，如果两个三角级数都收敛于同一个函数 $f(x)$，该两三角级数是否必恒等，问题就困难得多. 该问题等价于下述提法：如果一个三角级数的和恒为零，问该三角级数的所有系数是否都为零. 在一个变量的情形，Cantor 解决了这个问题，并进一步研究了唯一性点集的问题. 高维情形，程民德是得到多重三角级数唯一性结果的第一人，他在 Ann. of Math. (1950) 中证明了如果多重三角级数的球形和的算术平均收敛于0，则该级数的系数全为零. 值得注意的是在程的结果中并不要求级数球形和自已收敛于零. 而只是要求球形和作某种求和运算以后收敛于零. 这引起了一些后续工作，其中有进一步减弱求和条件的，也有将处处收敛于零减弱为除去某个点集以后收敛于零的，但从本质上说进展并不大.

为了讨论三角级数的唯一性，程民德 (Proc. A. M. S., 1951) 引进了广义拉普拉斯运算，进而给出了 m 重调和函数的刻划条件，而此前 D. Nicolesco 的结果其实只给出了必要条件并没有给出充分条件.

程民德—陈永和是我国开展多元三角逼近的先驱，他们最早得到（北京大学学报，1956）高于临界指标的 Bochner-Riesz 求和 $B_R^\delta f(x)=\sum\limits_{|\alpha|\leqslant R}\left(1-\frac{|\alpha|^2}{R^2}\right)^\delta C_\alpha e^{i\alpha\cdot x}, \delta>\frac{n-1}{2}$，(其中 $\sum\limits_{\alpha\in Z^n}C_\alpha e^{i\alpha\cdot x}$ 是 $f(x)$ 的多重 Fourier 级数)，能对 ε-Hölder 连续函数 ($0<\varepsilon<1$) 给出最佳逼近的完整结果. 这一结果激发了当 $\delta\leqslant\frac{n-1}{2}$ 时相应逼近问题的研究. 这一领域的研究至今仍很活跃.

程民德-陈永和还最早（北京大学学报，1956，1957）给出了多元周期函数的分数次积分算子的定义与性质. 八年后，S.

Wainger (Memoirs A. M. S., no. 59, 1963) 又独立获得了他们的结果.

关于 Bochner-Riesz 求和算子的各种各样的收敛性与逼近等问题，王斯雷、陆善镇、王昆阳等开展了系统的研究. 其中关于临界指标 Bochner-Riesz 算子 $\{R_R^{\frac{n-1}{2}}\}_R$ 的几乎处处收敛问题是最令人感兴趣的问题. 一维时，这相当于部分和算子的几乎处处收敛，它已由 L. Carleson 在60年代初解决.（他的这一结果现已改进为：当 $|f|\log^+|f| \in L^1(\boldsymbol{T})$，则 $f(x)$ 的 Fourier 级数部分和便几乎处处收敛于 $f(x)$.）高维时的情况如何现在还不知道. R. Fefferman 猜测 $f(x)$ 的熵条件 $J(f) < \infty$ 也许是 $\{B_R^{\frac{n-1}{2}} f(x)\}_R$ 几乎处处收敛于 $f(x)$ 的一个充分条件（"$J(f) < \infty$" 是一个比 "$|f|\log^+|f| \in L^1(\boldsymbol{T}^n)$" 稍强的条件）. M. H. Taibleson-G. Weiss 首先在一维，稍后陆善镇-M. H. Taibleson-G. Weiss 在高维利用函数空间的块分解技巧对此作了肯定的回答.

三　奇异积分算子理论

50年代，A. Calderon-A. Zygmund 发展了奇异积分算子理论. 它不仅使调和分析从此有了自己的高维理论，而且也使偏微分方程受益非浅，甚至也使用小波刻划函数空间有了理论依据. 在迄今为止的40多年中，奇异积分算子理论一直处于调和分析的中心位置. 国际上知名的调和分析专家与国内众多的调和分析工作者几乎无一不曾涉足其间.

第三代（非卷积型）奇异积分算子理论中有一个重要结果是奇异积分算子的 L^2 有界性判别定理，即 David-Journé 的 $T(1)$ 定理以及作为它的推广的 David-Journé-Semmes 的 $T(b)$ 定理. 它是调和分析80年代最令人瞩目的成果之一. 它说：设 $K(x, y)$ 是 $\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n$ 上满足如下大小、光滑条件的 Colderón-Zygmund 核

$$|K(x,y)| \leqslant c|x-y|^{-n}, \forall\, x \neq y,$$

$$|\Delta_x K(x,y)| + |\Delta_y K(x,y)| \leqslant c|x-y|^{-n-1}, \forall\, x \neq y.$$

则如下定义的奇异积分算子

$$Tf(x) = p.v.\int_{R^n} K(x,y)f(y)dy,$$

可以扩充为 L^2 ($\boldsymbol{R}^n$) 有界的算子，当且仅当 T 有某种弱有界性质 WBP，以及 $T(b)$，$T^t(b) \in$BMO，其中 $b(x)$ 是任一给定的仿增长函数.（例如实部有正下界的有界复值可测函数便是这样的函数），BMO 是有界平均振动函数的全体构成的空间，T^t 是 T 的转置. 许多重要的积分算子（例如著名的定义在 Lipschitz 曲线上的 Cauchy 积分算子）的 L^2有界性便是这一定理的简单推论，简单到几乎只应用诸如分部积分这些初等推理. 现在这个定理有许多简化证明，R. Coifman-P. Jones-S. Semmes (J. of A. M. S. 1989) 对一维给出了一个简化证明之后，许多人致力于高维的简化证明. 龙瑞麟1990年用鞅论通路简单地、构造性地给出了 $L^2(R^n)$ 的适应于任意给定的仿增长函数 $b(x)$ 的双正交基 $\{\alpha_I, \beta_I\}_{I\in\mathscr{D}}$，从而得到了令人满意的高维 Clifford 代数值 $T(b)$ 定理的简化证明 (Bull. Sci. Math. 1994).

T. Kato 关于增值椭圆微分算子平方根的定义域的 Kato 猜测是一个与奇异积分算子理论密切相关的问题. 1981年 R. Coifman-A. McIntosh-Y. Meyer 将一维 Kato 问题化为一组多线性奇异积分算子的估计，从而给一维 Kato 猜测以肯定回答. 稍后不久，邓东皋-R. Coitman-Y. Meyer (Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 1983) 将高维 Kato 问题化为另一类复杂得多的多线性奇异积分算子的估计，从而在系数矩阵 A 满足$\|A-I\|_\infty$小的条件下肯定回答了高维 Kato 猜测.

当核 $K(x,y)$ 只满足大小条件而不满足光滑条件时便得到所谓粗糙核奇异积分算子. 它由于更具一般性而引起人们广泛的兴趣，它的最简单的代表是 R. Fefferman 开始考虑过的算子：

$$Tf(x) = p.v.\int_{R^n}\Omega((x-y)')h(|x-y|)|x-y|^{-n}f(y)dy,$$

其中 x' 表示单位球面 S^{n-1} 上的点，$\int_{S^{n-1}}\Omega(x')\,dx'=0$，$h\in L^\infty$. 施咸亮 (Indiana U. M. J., 1986)，孙颀彧 (Appr. Th. S its Appl., 1991) 在迄今最弱的条件下得到了这类算子的有界性. 孙的结果是：当 $\int_{S^{n-1}}\Omega(x')\log(2+|\Omega(x')|)dx'<\infty$ 时，T 是 L^2 有界的，且这条件某种意义下不可改进；当 Ω 的 L^1 连续模满足 Dini 条件时，T 是弱 L^1 有界的与 L^p 有界的，$1<p<\infty$. 更复杂一些的粗糙核奇异积分算子的例子是陆善镇、张严 (Rev. Mat. Iberoamericana, 1992) 结合上述粗糙核奇异积分算子与振荡积分算子而考虑的粗糙核振荡积分算子

$$T^{(0)}f(x) = p.v.\int_{R^n}e^{ip(x,y)}\Omega((x-y)')|x-y|^{-n}h(|x-y|)f(y)dy,$$

其中 $p(x,y)$ 是实值多项式. 他们的结果是只要 $T^{(0)}$ 对应的除去振荡因子 $e^{ip(x,y)}$ 后的粗糙核奇异积分算子是 L^p 有界的，$1<p<\infty$，则 $T^{(0)}$ 也是 L^p 有界的，且其界只依赖于 $p(x,y)$ 的总阶数，而与 $p(x,y)$ 的系数无关.

S. Janson-J. Peetre 在 80 年代初提出了用不同的观点处理第三代奇异积分及其推广的新理论，即所谓仿交换子理论. 他们建立了仿交换子的有界性与 $p>1$ 时的 S_p 算子理想性质的刻画. 彭立中在他的博士论文(瑞典 Stockholm 大学，1984) 中得到了仿交换子的紧性与 $0<p<1$ 时的 S_p 性质的刻画. $p>1$ 与 $p<1$ 情形有本质差别.

g- 函数算子及其各类变形是奇异积分算子的重要代表，也是调和分析中有用的工具性算子. 王斯雷(中国科学，1982) 得到了 g- 函数算子在 BMO 空间上的有界性，意即：只要 $f(x)\in BMO$，使得存在一点 $x\in \boldsymbol{R}^n$ 使 $|g(f,x)|<\infty$，则

$$\|g(f)\|_{\mathrm{BMO}}\leqslant c\|f\|_{\mathrm{BMO}},$$

其中常数 c 与 f 无关.

四 Calderón 表示定理与函数空间刻画

Calderón 表示定理是调和分析中一个十分重要的结果，它是对函数空间进行原子分解的有效工具，也是小波理论的先导. Calderón 原来的表示定理是卷积型的，它断言存在好的函数对 $\varphi(x)$，$\psi(x)$（光滑，其 Fourier 变换支于球环 $\{\xi: \frac{1}{2} \leqslant |\xi| \leqslant 2\}$，而在更小一些的球环 $\{\xi: \frac{3}{5} \leqslant |\xi| \leqslant \frac{5}{3}\}$ 上不为零），使得

$$f(x) = \sum_k \psi_k * \varphi_k * f(x),$$

在 L^2 与 $\mathscr{S}/\mathscr{P}$ 意义下成立，其中 $*$ 表示卷积运算，$\varphi_k(x) = 2^{kn}\varphi(2^k x)$，$k \in z$，$\mathscr{S}$ 是 Schwartz 空间，$\mathscr{P}$ 是所有多项式的空间. 80年代以来，调和分析中出现了许多涉及到非卷积积分算子的令人感兴趣的问题，因而非卷积型 Calderón 表示定理吸引了人们的注意. 韩永生（Rev. Math. Iberoamericana，1994). 得到了联系于给定的仿增长函数 b（x）的非卷积型表示定理，它说：设 $\{S_k\}_{k,k\in z}$，是带满足适当大小、光滑条件的核 $\{S_k(x, y)\}$ 的称之为单位逼近的积分算子族. 此外，还有

$$\int_{R_n} S_k(x,y)b(y)dy = 1 = \int_{R_n} S_k(x,y)b(x)dx.$$

令 $D_k = S_k - S_{k-1}$. 则存在同类算子族 $\{\widetilde{D}_k\}$ 与 $\{\widetilde{\widetilde{D}}_k\}$ 使

$$f(x) = \sum_k \widetilde{D}_k M_b D_k M_b f(x) = \sum_k M_b \widetilde{\widetilde{D}}_k M_b D_k f(x),$$

其中 M_b 是用 $b(x)$ 作乘法的算子. 韩并定义了新的 Besov 与 Trieble-Lizorkin 空间，建立了这些空间上的 $T(b)$ 定理. 韩（与 Sawyer 合作，Memoirs A. M. S. no. 530，1994)）将上述结果推广到 Coifman-Weiss 意义下的齐型空间.

五、不等式与加权模不等式

不等式理论是整个分析数学中的核心内容之一，加权模不等式又是调和分析70年代一项重要成果. 可以说，不等式理论如同奇异积分算子理论一样，都是每个调和分析学家离不开的课题.

Carleson 测度及其相应的不等式是调和分析中一个很重要的成果，它在奇异积分算子理论. BMO 定间理论、日冕问题与复插值等中都起了很重要的作用. 邓东皋（Studia Math，1984）对此作了一个推广，得到

$$\int_{R_+^{n+1}}|f(y,t)g(y,t)|\frac{dydt}{t}\leqslant C\int_{R^n}A_q(f,x)C_q{}'(g,x)dx,$$

其中$1<q\leqslant\infty$，$\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$（$q$，$q'$称为互为共轭指标），$x$，$y\in R^n$，$t\in R_+$，$A_q(f,x)=\left(\int_{\Gamma(x)}|f(y,t)|^q\frac{dydt}{t^{n+1}}\right)^{\frac{1}{q}}$，$\Gamma_{(x)}$ 是以 x 为顶点的锥，$C_{q'}(f,x)=\sup\limits_{x\in B}\left(\frac{1}{|B|}\int_{\hat{B}}|g(y,t)|^{q'}\frac{dydt}{t}\right)^{\frac{1}{q'}}$，$B$ 是 R^n 中球，$\hat{B}$ 是以 B 为底的帐篷. 这不仅概括了已有的结果，例如当 $q=\infty$ 时就是原来的 Carleson 不等式，当 $q=2$ 时便是 H_1-BMO 对偶不等式；而且还为帐篷空间的引进创造了条件.

Sobolev 不等式是微分方程与数学物理中一个很重要的不等式，加权的 Sobolev 不等式更与 Schrödinger 算子的特征根估计密切相关. 龙瑞麟、聂伏生（科学通报，1992）证明了：对 $1<p\leqslant q<\infty$，设 $v(x)$，$w(x)$ 是使得分数次积分算子 I_1 是弱（$L^p(w)$，$L^q(v)$）有界的两个权函数，则如下两权 Sobolev 不等式

$$\left(\int_{R^n}|f|^q v dx\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant C\left(\int_{R^n}|\nabla f|^p w dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

对所有那些 $f(x)\in C'(R^n)$ 满足 $\lim\limits_{|x|\to\infty}f(x)=0$ 成立. 这样，条件

$$\left(\int_Q I_1(v\chi_Q)^{p'}\omega^{1-p'}dx\right)^{\frac{1}{p'}} \leqslant A|Q|_v^{\frac{1}{q'}}, \forall \text{方体 } Q,$$

便是上述两权 Sobolev 不等式的充分条件，其中 χ_Q 是 Q 的特征函数，p'，q' 分别是 p，q 的共轭指标，$|Q|_v$ 是 Q 的 v 测度，A 是不依赖于 Q 的常数，这个条件是迄今最简单与最弱的条件.

临界指标 Bochner-Riesz 求和算子 $\{B_R^{\frac{n-1}{2}}\}_R$ 的加权模不等式方面，施咸亮一孙颀彧（Proc. A. M. S.，1992）得到了令人满意的结果，即 $\omega\in A_p$（Muckenhoupt 权类）推出

$$\|B_R^{\frac{n-1}{2}}(f)\|_{L^p(w)} \leqslant C\|f\|_{L^p(w)}, \quad \forall f, \quad 1<p<\infty.$$

而在此前，只有当 $w(x)$ 是幂函数、经向函数时的部分结果.